

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**STRATÉGIE RIEŠENIA SLOVNÝCH ÚLOH
S DÔRAZOM NA VYUŽITIE VIZUÁLNYCH
REPREZENTÁCIÍ**

Výber z diplomovej práce

Školiace pracovisko: Katedra didaktiky matematiky, fyziky a informatiky

Školiteľka: Mgr. Michaela Vargová, PhD.

Bratislava, 2021

Lenka Tarajová, Bc.

Obsah

1	Slovné úlohy v matematike	3
1.1	Pojem slovná úloha	3
1.1.1	<i>Varianty zadania slovných úloh</i>	<i>4</i>
1.2	Jednotlivé kroky postupu práce so slovnými úlohami	6
1.2.1	<i>Matematizácia slovných úloh a interpretácia výsledkov.....</i>	<i>6</i>
1.3	Typy slovných úloh.....	9
1.4	Metódy a stratégie riešenia slovných úloh	10
1.4.1	<i>Rovnice, nerovnice a sústavy rovníc</i>	<i>10</i>
1.4.2	<i>Trojčlenka</i>	<i>11</i>
1.4.3	<i>Vizuálno-schematické reprezentácie</i>	<i>12</i>
2	Vizualizácia	13
2.1	Definícia a funkcie vizualizácie	13
2.2	Jednotlivé druhy vizuálnych reprezentácií	14
2.2.1	<i>Diagram ako jeden z najúčinnějších vizuálnych nástrojov</i>	<i>15</i>
2.2.2	<i>Obdĺžnikové modely („bar models“)</i>	<i>16</i>
3	Zbierka slovných úloh	18
3.1	Úlohy o rovnomernom pohybe	18
3.2	Pomer	22
3.3	Úlohy o veku	25
3.4	Zlomok ako časť celku	28
3.5	Hľadanie najmenšieho spoločného násobku	30
3.6	Geometrická slovná úloha.....	32
3.7	Vennove diagramy	35
3.8	Rovnice a sústavy rovníc	36
3.9	Myslím si číslo	42
3.10	Viac, menej, rovnako	44
3.11	Úlohy so špeciálnym obsahom na logiku.....	49
3.12	Slovné úlohy o spoločnej práci	52
	Zoznam použitej literatúry	55

1 Slovné úlohy v matematike

Slovné úlohy sú dôležitou súčasťou matematiky. Ich riešenie si častokrát vyžaduje použitie niekoľkých matematických algoritmov a pochopenie zložitejších logických súvislostí. Cieľom riešiteľa slovnej úlohy je správne porozumieť slovnému zadaniu takejto úlohy a vyselektovať z tohto zadania potrebné informácie, vďaka čomu sa možno na prvý pohľad zložitý problém zjednodušiť. Následne sa riešiteľ snaží nájsť vhodný numerický, algebrický, geometrický, či iný špeciálny postup, ktorý povedie k úspešnému riešeniu a správne výsledku.

Zaradenie slovných úloh do osnov štátneho vzdelávacieho programu má svoje opodstatnenie a zmysel, ktorý je charakterizovaný nasledovnými bodmi [1]:

- riešenie slovných úloh do veľkej miery ovplyvňuje rozvoj kreativity, pozornosti, ale i samotného spôsobu myslenia žiakov;
- vďaka vhodnému výberu slovných úloh žiaci hlbšie pochopia fungovanie a využitie naučených algoritmov, či fundamentálnych matematických pojmov;
- riešenie slovných úloh je takisto prípravou žiakov a študentov na používanie matematiky v praktickom živote;
- riešenie slovných úloh pomáha študentom zautomatizovať používanie základných počtových operácií a vybudovať si výpočtové návyky.

1.1 Pojem slovná úloha

Predtým ako sa dostaneme ku klasifikácii slovných úloh, či k popísaniu postupu alebo metód riešení, je veľmi dôležité vymedziť a definovať pojem slovná úloha, keďže toto slovné spojenie je nosným prvkom našej práce. V literatúre sa stretávame s viacerými definíciami tohto pojmu, pričom hlavná myšlienka každej definície je vo svojej podstate veľmi podobná.

Podľa O. Šedivého a K. Križaloviča môžeme slovné úlohy definovať ako úlohy, vyjadrujúce závislosť medzi hľadanými číselnými údajmi prostredníctvom slovného zadania. Pri riešení slovných úloh je potrebné na základe správnej úvahy identifikovať také počtové operácie, ktorých použitie pri práci s číslami povedie ku korektnému výsledku, resp. k nájdeniu čísla, ktoré hľadáme. Úlohy, v ktorých máme predpísaný a stanovený algoritmus riešenia, či určené počtové operácie, ktoré treba pri riešení použiť, neradíme medzi slovné úlohy. Opis situácie v slovnej úlohe a číselné údaje vystupujúce v zadaní

nazývame podmienkou a otázkou sa zase nazýva opis toho, čo je potrebné v úlohe vypočítať [2].

Podstatu termínu slovná úloha výstižne a stručne vyjadril aj M. Hejný. Slovnú úlohu považuje za matematickú úlohu, pri riešení ktorej je potrebné pochopenie jazykového vyjadrenia a presahu do reálnych životných situácií [3].

Na rozdiel od počítania matematických príkladov bez slovného zadania si riešenie slovných úloh vyžaduje vyššiu úroveň čitateľskej a matematickej gramotnosti, kreativity a logiky. Dôvodom takýchto vyšších nárokov je komplexnejšie a zároveň komplikovanejšie zadanie úlohy a problému, ktorý treba riešiť.

O. Šedivý a D. Vallo definujú matematickú gramotnosť ako „schopnosť jednotlivca identifikovať a pochopiť úlohu, ktorú matematika zohráva vo svete, vykonávať dobre podložené matematické úsudky a zaoberať sa matematikou spôsobom, ktorý bude spĺňať potreby súčasného aj budúceho života jednotlivca ako konštruktívneho, zainteresovaného a premýšľavého občana“ [4].

1.1.1 Varianty zadania slovných úloh

V súčasnej dobe za slovnú úlohu nepovažujeme len čisto slovnú formuláciu opisujúcu vzťah čísel. Informácie obsiahnuté v zadaní slovnej úlohy, ktoré sú potrebné na stanovenie výsledku, môžu mať takisto podobu schémy, diagramu, obrázka, či iných zaujímavých foriem. Takýto vizuálny spôsob zadania môže do značnej miery riešiteľovi uľahčiť prácu pri riešení. No len málokedy sú grafy, tabuľky, či diagramy súčasťou samotného zadania. Často je potrebné a najmä veľmi odporúčané vhodnú schému vytvoriť. Vizualizácii informácií zo zadania a takisto výhodám, ktoré riešenie slovných úloh prostredníctvom obrazových reprezentácií prináša sa podrobnejšie venujeme v druhej kapitole tejto práce.

Nižšie uvádzame príklady rôznych typov zadania slovných úloh, s ktorými sa môžu žiaci stretnúť.

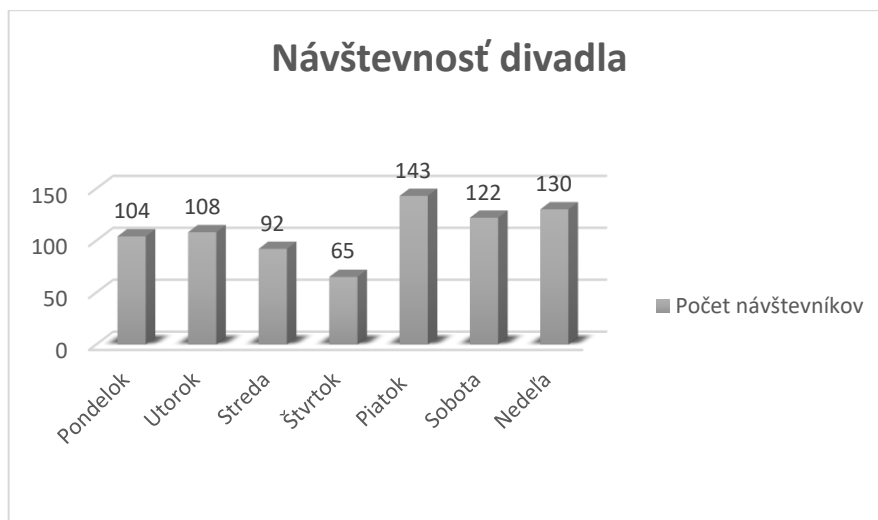
Príklad č.1 : Slovná úloha zadaná len verbálnou formuláciou

Štyri deti vyrobili z 8 dcl bublifuku 6400 bublín. Trvalo im to presne 1 hodinu a 20 minút. Koľko minút potrebuje 10 žiakov na vyrobenie bublín z 3 litrov bublifuku, ak budú vyrábať bubliny rovnakou rýchlosťou a spotrebujú na jednu bublinu v priemere rovnaké množstvo bublifuku [5].

Príklad č.2 : Slovná úloha zadaná pomocou diagramu

Nižšie znázornený diagram udáva počet návštevníkov divadla počas jedného týždňa. Koľko dní bola návštevnosť divadla nižšia ako priemerná návštevnosť v danom týždni.

Graf 1: Diagram k príkladu č.2

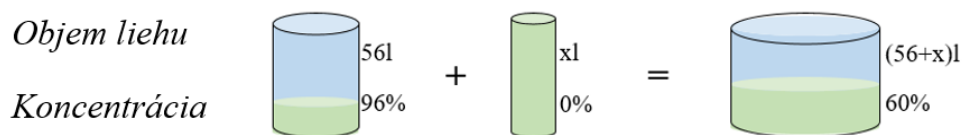


Zdroj: Vlastné spracovanie

Príklad č.3 : Zadanie slovnej úlohy obsahujúce obrázkovú schému

Koľko litrov vody treba priliať do 56 litrov čistého liehu s koncentráciou 96%, aby sme získali lieh s koncentráciou 60%? Riešte pomocou obrázka.

Obrázok 1: Schematické zadanie slovnej úlohy



Zdroj: Vlastné spracovanie podľa: ŠEDIVÝ O. a kol.: *Matematika pre 9. ročník základných škôl*. SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Tretie vydanie, 2005. s. 102. ISBN 80-10-00747-1.

Príklad č.4 : Zadanie slovnej úlohy obsahujúce tabuľku

Evička má o pár dní nastúpiť do prvej triedy a preto jej mamička kúpila potrebnú školskú výbavu:

Tabuľka 1: Školské pomôcky

<i>Typ školskej pomôcky</i>	<i>Cena</i>
<i>školská taška</i>	<i>52€</i>
<i>ceruzy</i>	<i>1,50€</i>
<i>perá</i>	<i>4,10€</i>
<i>úbor na telesnú</i>	<i>24€</i>
<i>pastelky</i>	<i>5,20€</i>
<i>papučky</i>	<i>7,30€</i>

Zdroj: Vlastné spracovanie

Vypočítajte, koľko zaplatila mamička za písacie potreby.

1.2 Jednotlivé kroky postupu práce so slovnými úlohami

Úroveň matematickej gramotnosti každého jednotlivca závisí od schopnosti riešiť problémy a úlohy z rôznorodých oblastí, ktoré sú súčasťou života okolo nás. Medzi oblasti, ktoré sú do veľkej miery závislé od matematiky, patrí napríklad chémia, fyzika, biológia, ekonómia, ale aj manažment, či iné vedné disciplíny. Avšak po prečítaní znenia úlohy z akejkoľvek vyššie spomínanej oblasti nevieme hneď povedať, aká je odpoveď na otázku daného problému. Na stanovenie výsledku úlohy a nájdenie správnej odpovede je potrebné prejsť niekoľkými základnými krokmi a dodržať určité zásady.

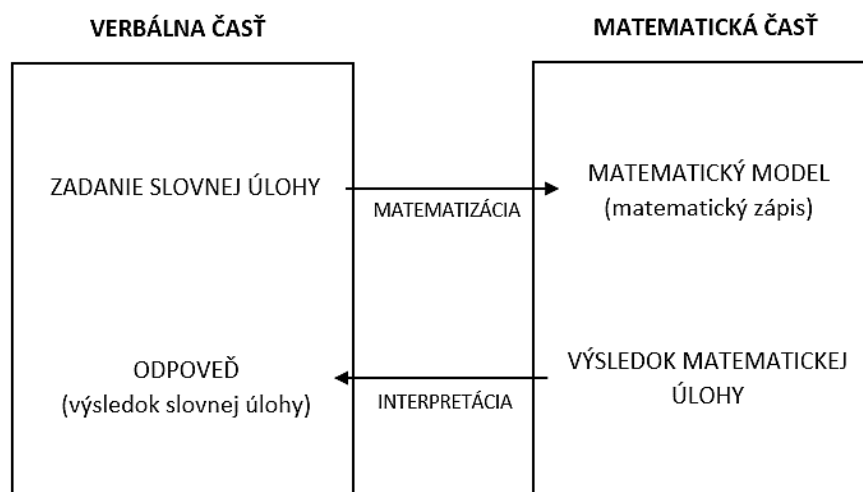
1.2.1 Matematizácia slovných úloh a interpretácia výsledkov

Proces riešenia slovných úloh je založený na prechode medzi verbálnou a matematickou časťou, pričom tento prechod je realizovaný prostredníctvom matematizácie slovnej úlohy a interpretácie výsledkov [6].

Práve v úlohách z vedných disciplín spomenutých vyššie, ktoré nie sú výlučne len čisto matematické, je proces matematizácie nevyhnutným pri hľadaní správneho riešenia.

Na nasledujúcom obrázku je schematicky znázornený vzťah medzi časťami tohto procesu. Ako môžeme vidieť, pri spracovaní a riešení slovnej úlohy ide vlastne o transformáciu textu do podoby matematickej úlohy a následný návrat do kontextu slovného zadania.

Obrázok 2: Schéma riešenia



Zdroj: Vlastné spracovanie podľa: ŠEDIVÝ O. a kol.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. NITRA: UKF, 2013. s. 69. ISBN 978-80-558-0438-5.

V nižšie uvedených podkapitolách popíšeme jednotlivé body spomenuté v tejto schéme.

1.2.1.1 *Zadanie slovnej úlohy*

Prvým krokom v práci so slovnými úlohami je dôkladné prečítanie slovného zadania. Na to, aby sme vytvorili správny matematický model, je veľmi dôležité prečítať si zadanie s porozumením. Ak chce riešiteľ slovnej úlohy dospieť k riešeniu, je nevyhnutné, aby jasne rozumel celému zadaniu, nie len určitej časti. Taktiež sa odporúča prečítať si zadanie aj viackrát a nebáť sa použiť matematickú literatúru, či rôzne slovníky na objasnenie významu odborných slov. Pred začatím riešenia teda treba mať jasno v tom, ktoré informácie máme zadané a ktoré naopak chceme zistiť [7], pretože od správneho pochopenia zadania závisí úspešnosť a kvalita výsledku.

1.2.1.2 *Tvorba matematického modelu*

Ďalším a zároveň najdôležitejším krokom v procese matematizácie je transformácia verbálnych formulácií na matematický model. Pod pojmom matematický model rozumieme opis problému vyjadreného prostredníctvom závislých a nezávislých premenných, funkcií, rovníc a iných matematických vyjadrení, teda nie slovným popisom [7].

Matematický model môžeme považovať aj za matematický zápis riešenej situácie, vďaka ktorému sa zadanie stane prehľadnejším a umožní riešiteľovi identifikovať vhodnú aritmetickú, geometrickú alebo akúkoľvek inú operáciu potrebnú na dopracovanie sa

k výsledku. Stručne povedané, v tomto kroku si prostredníctvom matematickej symboliky alebo vizuálnej schémy vyjadríme, čo poznáme a čo chceme vypočítať.

1.2.1.3 Riešenie slovnej úlohy

Po vytvorení matematického modelu môžeme prejsť k samotnému riešeniu danej úlohy. Pod riešením slovnej úlohy rozumieme použitie vhodnej výpočtovej operácie, prevedenie správneho riešiteľského algoritmu, či použitie adekvátneho vzorca. Aplikovanie týchto aparátov by následne malo viesť k stanoveniu výsledku, teda k vyriešeniu situácie popísanej v zadaní.

Pri riešení slovných úloh môže učiteľ vyžadovať, aby žiaci aplikovali ním určené postupy, pretože ich on považuje za najúčinnnejšie v danej situácii a v kontexte danej úlohy. V takomto prípade ide o transmisívny prístup. Druhou možnosťou je konštruktivistický prístup, kedy žiaci sami rozhodnú aké riešiteľské postupy využijú [8]. Či už stratégiu riešenia volí učiteľ alebo samotný riešiteľ, dôležité je zvoliť takú, ktorá sa zdá byť najvhodnejšia na výpočet neznámeho elementu.

Matematicky zdatnejší študenti preferujú konštruktivistický prístup, pretože sami vedia vysvetliť obsah a význam problému slovnej úlohy, dokážu analyzovať informácie, reštrikcie, vzájomné vzťahy medzi objektami a takisto ciele, ktoré chcú v úlohe dosiahnuť. Uvažujú o forme riešenia a zamýšľajú sa nad celkovým postupom. Porovnávajú analogické problémy a skúšajú špeciálne, či jednoduchšie formy riešenia pôvodného problému. Počas celej doby riešenia monitorujú jeho priebeh a v prípade potreby skúšajú aj iné, alternatívne stratégie [9]. Naopak, študenti, pre ktorých sú slovné úlohy len nelogickým zoskupením čísel a slov, sú radšej, ak im učiteľ naznačí, akú metódu majú na získanie výsledku použiť.

Na riešenie slovných úloh môžeme použiť rôznorodé metódy, stratégie či postupy. Najčastejšie používané aparáty sú logický úsudok, priamy výpočet, rovnice, nerovnice, trojčlenka a pod., použitím ktorých sa dopracujeme k výsledku. Dôležité je vybrať efektívnu metódu, ktorá bude nielen rýchla, ale aj korektná. Niekedy môže byť výpočet sprevádzaný aj slovným komentárom, ktorý vysvetľuje riešiteľovu úvahu a jeho myšlienkové pochody.

1.2.1.4 Skúška správnosti a odpoveď

Vykonanie skúšky správnosti nie je nevyhnutné a nie vždy sa dá previesť. Avšak ak to povaha príkladu umožňuje, tak sa overenie správnosti výsledku odporúča.

Odpoveď na otázku je vlastne spätná transformácia výsledku matematického modelu do verbálnej podoby. Na rozdiel od skúšky správnosti je odpoveď neodmysliteľnou súčasťou

riešenia slovných úloh, najmä v prípade zložitejších slovných formulácií, pri riešení ktorých je potrebné použiť niekoľko medzivýpočtov. Tieto medzivýpočty vedú k čiastkovým výsledkom a teda nie je úplne jednoznačné, čo je konečným výsledkom. Okrem toho je pri odpovedi potrebné zvážiť aj relevantnosť výsledkov, ktoré sme dostali riešením matematickej úlohy, čiže vykonať tzv. matematickú reflexiu.

Ako hovorí O. Šedivý [6], treba mať na pamäti, že nie každý výsledok matematickej úlohy prislúchajúcej riešenému slovnému problému je tým správnym výsledkom. Klasickým príkladom, kde je potrebné zvážiť, ktorý z výsledkov dáva vzhľadom na kontext logicky správnu odpoveď na otázku slovnej úlohy, je riešenie kvadratickej, či iracionálnej rovnice.

1.3 Typy slovných úloh

Slovné úlohy môžeme roztriediť do niekoľkých kategórií. Avšak neexistuje presná klasifikácia slovných úloh, ktorá by bola pre všetkých záväzná. Ako uvádza Šíma vo svojej dizertačnej práci, najčastejšie sa stretávame s delením úloh podľa obsahu problému, ktorý má byť riešený, ale taktiež podľa metódy, ktorú je vhodné na riešenie úlohy použiť. Sú to najčastejšie takéto kategórie [10]:

- slovné úlohy o celku a častiach;
- slovné úlohy o číslach;
- slovné úlohy o pohybe
- slovné úlohy o zmesiach;
- slovné úlohy o spoločnej práci;
- slovné úlohy o veku a letopočte;
- slovné úlohy s percentami;
- kombinatorické slovné úlohy;
- slovné úlohy o hrách a pravdepodobnosti;
- slovné úlohy súvisiace s finančnou matematikou;
- slovné úlohy o radoch a postupnostiach;
- štatistické slovné úlohy;
- slovné úlohy na logické operácie;
- slovné úlohy s fyzikálnou tematikou;
- slovné úlohy o geometrických útvaroch a ďalšie.

1.4 Metódy a stratégie riešenia slovných úloh

V tejto podkapitole práce chceme opísať jednotlivé stratégie riešenia slovných úloh. Existuje široké spektrum nástrojov, metód a algoritmov, ktoré je možné používať, no už samotný názov diplomovej práce indikuje, že sa v práci chceme detailnejšie zamerať na vizuálno-schematické reprezentácie a modely. Avšak najskôr aspoň v krátkosti vymenujeme a stručne opíšeme najčastejšie používané stratégie riešenia a ďalšiu celú kapitolu venujeme už len vizualizácii a jej využitiu pri riešení slovných úloh.

1.4.1 Rovnice, nerovnice a sústavy rovníc

Rovnica, ale aj nerovnica je matematický zápis výrazu, ktorý okrem čísel obsahuje aj neznámu, najčastejšie označovanú písmenom x . Vyriešením rovnice pomocou ekvivalentných úprav rovníc dostaneme hodnotu tejto neznámej, ktorú v matematickej terminológii nazývame koreň rovnice. V súvislosti so slovnými úlohami môžeme povedať, že vo väčšine prípadov dáva koreň rovnice zostavenej podľa zadania odpoveď na otázku slovnej úlohy, teda tento koreň je riešením problému.

Príklad č.1 : Slovná úloha riešená prostredníctvom rovnice

21 žiakov sa zúčastnilo na olympiáde z anglického jazyka. Chlapcov bolo o 5 menej ako dievčat. Koľko dievčat a koľko chlapcov bolo na olympiáde?

Dievčat	x
Chlapcov o 5 menej ako	$x - 5$
<u>Spolu</u>	<u>21</u>

$$x + (x - 5) = 21$$
$$2x - 5 = 21$$
$$2x = 26$$
$$\underline{x = 13}$$

Olympiády sa zúčastnilo 13 dievčat a 8 chlapcov.

Pri riešení sústavy rovníc s viacerými neznámymi dostaneme viacej koreňov, ktoré sú spoločným riešením pre všetky rovnice. Metódy, ktoré sa pri riešení sústav používajú sú [11]:

- substitučná metóda;
- adičná metóda;
- komparačná metóda.

V kontexte slovných úloh sa najčastejšie stretávame so sústavami dvoch lineárnych rovníc. Použitím ktorejkoľvek metódy sa snažíme takúto sústavu zredukovať len na jednu rovnicu s jednou neznámou, ktorú vieme jednoducho vypočítať a druhú neznámu vyrátame dosadením do niektorej z pôvodných rovníc [11].

Príklad č.2 : Slovná úloha riešená prostredníctvom sústavy rovníc

4 jogurty a 5 lízaniek stojí 10,50€. Za jednu lízanku a 7 jogurtov zaplatíme 14,50€. Koľko zaplatíme za 10 jogurtov a 4 lízanky?

$$\begin{array}{ll}
 \text{Jogurt} & x \\
 \text{Lízanka} & y \\
 4 \text{ jogurty a } 5 \text{ lízaniek} & 10,50\text{€} \\
 \underline{1 \text{ lízanka a } 7 \text{ jogurtov}} & \underline{14,50\text{€}} \\
 4x + 5y = 10,5 \\
 y + 7x = 14,5 \\
 4x + 5(14,5 - 7x) = 10,5 \\
 31x = 62 \\
 x = 2 \\
 4 \cdot 2 + 5y = 10,5 \\
 5y = 2,5 \\
 y = 0,5
 \end{array}$$

10 jogurtov stálo $10 \cdot 2 = 20$ € a 4 lízanky $4 \cdot 0,5 = 2$ €. Spolu zaplatíme 22 €.

1.4.2 Trojčlenka

Trojčlenka je jednoduchý a žiakmi veľmi obľúbený nástroj, ktorý sa používa na riešenie úloh týkajúcich sa priamej a nepriamej úmernosti. Teda závislosť javov vystupujúcich v zadaní úlohy je buď priama ($y = kx$) alebo nepriama ($y = k/x$).

Príklad č.3 : Slovná úloha riešená trojčlenkou

5 žien upečie v pekárni za 1 hodinu 15 chlebov. Koľko chlebov upečie 7 žien, ak všetky ženy pracujú rovnako rýchlo?

$$\begin{array}{ll}
 \uparrow 5 \text{ žien} & 15 \text{ chlebov} \uparrow \\
 \uparrow 7 \text{ žien} & x \text{ chlebov} \uparrow \\
 \hline
 5x = 15 \cdot 7 \\
 5x = 105 \\
 x = 21 \\
 7 \text{ žien upečie za hodinu } 21 \text{ chlebov.}
 \end{array}$$

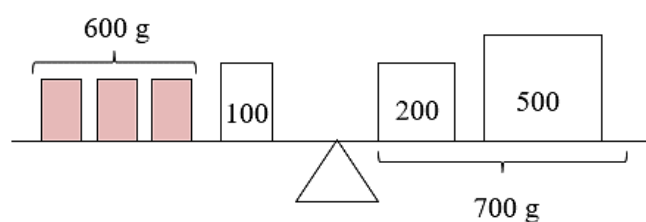
1.4.3 Vizuálno-schematické reprezentácie

V prípade takejto stratégie riešenia slovných úloh ide o transformáciu informácií zo zadania pomocou obrazového vyjadrenia. Význam zachytenia kontextu úlohy formou schémy, obrázka alebo diagramu sa v súčasnosti dostáva do popredia, najmä v dôsledku účinnosti a efektívnosti, ktoré použitie týchto vizuálnych reprezentácií prináša. Avšak u nás ešte stále v porovnaní s klasickými matematickými aparátmi, táto stratégia zaostáva. Preto sa v ďalších častiach práce podrobne zaoberáme už len aspektami vizualizácie slovných úloh.

Príklad č.4 : Slovná úloha riešená vizuálnou reprezentáciou

Na jednej strane váhy sú tri poháre džemu a 100 g závašie. Na druhej strane sú dve závažia s hmotnosťou 200 g a 500 g. Váhy sú v rovnováhe. Koľko g váži jeden pohár džemu?
[12]

Obrázok 3: Grafické riešenie



Zdroj: Vlastné spracovanie

Ak tri poháre džemu vážia 600 g, tak jeden pohár musí vážiť $600 : 3 = 200$ g.

2 Vizualizácia

V kontexte našej diplomovej práce považujeme vizualizáciu za jednu z veľmi špecifických a zároveň účinných metód riešenia slovných úloh. Jej použitie nie je obmedzené len na úlohy z konkrétneho tematického celku alebo len čisto geometrické úlohy. Má uplatnenie v rôznych matematických okruhoch a takisto v úlohách s rôznym obsahom. Termín vizualizácia v práci nahrádzame taktiež slovnými spojeniami ako obrazová, grafická, či vizuálno-schematická reprezentácia, pričom uvedené termíny považujeme za synonymá.

2.1 Definícia a funkcie vizualizácie

Niektorí autori charakterizujú vizualizáciu ako schopnosť, resp. proces kreatívneho znázornenia, či použitia obrázkov, schém a diagramov s cieľom zobrazit' dané informácie na papieri, v mysli, ale aj prostredníctvom technológie, premýšľať o nich a rozvíjať nové nápady [13].

Vizuálne zobrazenia a ich použitie pri riešení slovných úloh plní viacero funkcií. Medzi takéto funkcie zápisu slovnej úlohy prostredníctvom obrazového záznamu patria podľa [14]:

- reprezentujúca funkcia (ide o vytváranie obrazovej predstavivosti);
- organizujúca funkcia (usporiadanie nadobudnutých vedomostí a predstáv);
- interpretujúca (ide o jednoduchšie pochopenie preberaného učiva);
- transformujúca (ovplyvňuje spôsob spracovávania informácií);
- funkcia koncentrovanej pozornosti (vďaka obrazom sa žiaci dokážu dlhšie sústrediť pri riešení úlohy);
- kognitívno-regulačná funkcia (obrazový materiál napomáha rozvíjať poznávacie procesy).

Dôležitosť a význam vizualizácie vyzdvihol aj samotný Albert Einstein, ktorý tvrdil, že slová a jazyky nehrajú v mechanizme jeho myslenia takmer žiadnu úlohu, ale dôležitými elementami sú obrazy. Aj v škole, ktorú Einstein navštevoval sa vizuálne myslenie pokladalo za najmocnejšiu vlastnosť ľudskej mysle a predstavivosť zase za začiatok každej vedomosti [15].

Stanislav Lukáč vo svojom článku hovorí, že vizuálne reprezentácie umožňujú vytvárať matematické modely situácie popísanej v zadaní slovnej úlohy. Vďaka takýmto modelom sa v mysli riešiteľov odohrávajú kognitívne procesy orientované na čítanie

zadania s porozumením, selekciu potrebných informácií a číselných údajov, identifikáciu neznámych a ich vzájomných súvislostí a následne voľbu najefektívnejšej metódy riešenia. Použitie modelov, ktoré sú postavené na obrazových reprezentáciách vstupných údajov a vzťahov (grafy, diagramy, prehľadné obrázky, schémy...) zvyšuje efektivitu vyučovacích metód a schopnosť pochopiť samotné riešenie slovných úloh [16].

Síce použitie vizualizácie pri riešení slovných úloh zameraných na výpočet obsahu, objemu, obvodu a povrchu geometrických útvarov a telies je dnes už samozrejmosťou a aj samotní pedagógovia apelujú na žiakov, že v takýchto prípadoch je tvorba náčrtu nielen užitočná, ba dokonca nutná, v iných matematických sférach nie je vizualizovanie pre žiakov až takým prirodzeným krokom.

Strnádková vo svojej diplomovej práci tiež uvádza, že vizualizovanie dokáže uvoľniť určitú časť kapacity riešiteľovej pamäte a následne dať priestor na priebeh ďalších mentálnych procesov, ako je indukcia, dedukcia, abstrakcia, či komparácia, vďaka čomu je riešiteľ častokrát úspešnejší a ľahšie sa orientuje v novej látke. Vďaka zapojeniu zraku, ako jednej zo zložiek vnímania, totižto dochádza k lepšiemu porozumeniu danej situácie [17].

Vyššie uvedené skutočnosti sú dôvodom, prečo je veľmi odporúčané, aby sa vizualizovanie informácií zo zadania slovných úloh zakomponovalo do výučby matematiky najmä v nižších ročníkoch, kedy si žiaci osvojujú základy a budujú matematické myslenie. Vizualne znázornenia potom do značnej miery dokážu žiakov motivovať a takisto zatriktívniť výučbu matematiky. Neskôr, vo vyšších ročníkoch, keď už budú študenti oboznámení s obrazovými reprezentáciami, budú môcť vizualizáciu spontánne používať ako jednu z možných alternatív, v prípade, že klasické riešiteľské metódy zlyhajú, resp. ich použitie bude časovo náročnejšie ako jednoduchá vizualizácia.

Veríme, že táto podkapitola čitateľovi objasnila význam a samozrejme využiteľnosť vizualizácie ako jednej zo znamenitých stratégií matematického modelovania a samotného riešenia slovných úloh.

2.2 Jednotlivé druhy vizuálnych reprezentácií

Existuje niekoľko druhov vizuálnych znázornení konkrétnych slovných úloh. Podľa niektorých autorov [12] môžeme vizuálne znázornenia rozdeliť do dvoch skupín, a to:

- **obrázkové a**
- **vizuálno-schematické znázornenia.**

Pri obrázkových znázorneniach sa žiaci zameriavajú zvyčajne na vizuálny vzhľad prvkov, ktoré vystupujú v zadaní. Tieto reprezentácie pozostávajú z detailných obrazcov, vytváranie ktorých však podľa niekoľkých štúdií negatívne súvisí s výkonom riešenia. Dôvodom je najmä to, že žiaci stavajú takéto zobrazenia na konkrétnom prvku alebo vete a neberú úlohu ako súvislý celok. Naopak, žiaci, ktorí preferujú vizuálno-schematické znázornenia, uspejú pri riešení slovných úloh s oveľa vyššou pravdepodobnosťou, pretože jednotlivé prvky, čísla a vzťahy zo zadania zobrazia ako súbor navzájom previazaných častí [12].

Medzi typy vizuálnych reprezentácií patria podľa [1]:

- znázornenie pomocou konkrétnych objektov spomenutých v texte;
- úsečkové obrazce;
- znázornenie pomocou geometrických útvarov, najčastejšie pomocou obdĺžnikov;
- stromové reprezentácie;
- množinové diagramy, resp. iné typy diagramov;
- tabuľkové znázornenie a pod.

Je veľmi dôležité, aby žiaci o týchto možnostiach vedeli a mohli si vybrať takú alternatívu, ktorej oni sami rozumejú a samozrejme, ktorá je vhodná na riešenie daného typu problému. Pri výučbe matematiky treba však dbať na to, aby sa žiaci vyhýbali obrázkovej vizualizácii a kresleniu „umeleckých diel“ a skôr sústredili svoju pozornosť na tvorbu jednoduchých schematických náčrtov, napríklad pomocou rôznych druhov diagramov.

2.2.1 Diagram ako jeden z najúčinnějších vizuálnych nástrojov

Diagram môžeme definovať ako obrazové vyjadrenie matematického problému, prostredníctvom ktorého sú znázornené jednotlivé časti problému a ich vzájomný vzťah. Inými slovami je to reprezentácia, ktorá zobrazuje kvantitatívne a vzťahové informácie opísané v slovnej úlohe a umožňuje porozumieť, vyriešiť a následne zhodnotiť riešenie problému [18].

Hoci je diagram považovaný za veľmi užitočnú alternatívu vizuálnych reprezentácií, množstvo študentov nevie o výhodách, ktoré im použitie diagramu pri riešení slovných úloh môže priniesť. Je preto veľmi dôležité, aby sa v procese matematického vzdelávania venovala osobitná pozornosť rozvoju porozumenia samotným diagramom a tiež ich použitiu pri riešení matematických slovných úloh.

Diagramy, ale aj iné obrazové reprezentácie používané v matematike majú určité spoločné pravidlá, ktorým by mali žiaci rozumieť, pretože len tak sú schopní identifikovať informácie obsiahnuté v diagrame. Ak žiak nevie čítať grafický jazyk matematiky, nezíska celú správu zakódovanú v takomto znázornení a nevie s ňou ďalej pracovať [19]. Samozrejme, absencia takejto gramotnosti má negatívny dopad aj na opačnú situáciu. Žiak potom nemôže vedieť ani informácie obsiahnuté v zadaní slovnej úlohy zakódovať do podoby schémy alebo diagramu, ktorý by následne použil pri jej riešení.

Ak diagram nie je súčasťou zadania slovnej úlohy a žiak si chce diagram vytvoriť sám, je tiež veľmi užitočné poznať nasledovné skutočnosti [18]:

- v diagrame nemusí byť zaznamenaná úplne každá informácia zo zadania;
- diagram nemusí byť nutne realistický;
- jeho tvorba by nemala zabráť veľa času;
- pri jeho tvorbe sa odporúča používať také znaky a symboly, ktoré sú ľahko zapamätateľné, ako napríklad písmená, bodky, geometrické útvary a pod.

2.2.2 Obdĺžnikové modely („bar models“)

„Bar“ modely nie sú žiadnou novinkou v matematike a jej vyučovaní, pretože už v roku 1983 boli predstavené v Singapure ako heuristická stratégia riešenia slovných úloh zameraných na celé čísla, zlomky, pomer alebo percentá [20].

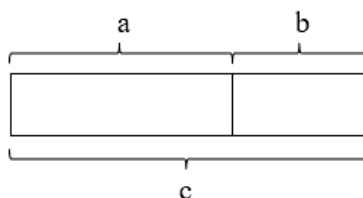
Sybilla Backmann vo svojom odbornom článku hovorí, že úspešnosť singapurských detí v oblasti matematiky do istej miery určite súvisí s používaním jednoduchých obrazcov a diagramov, ktoré učitelia využívajú pri vysvetľovaní matematických ideí a fakt, že tieto deti vnímajú vizuálne reprezentácie ako zmysluplnú pomôcku na riešenie slovných úloh. V singapurských matematických materiáloch nie sú obrazové reprezentácie používané ako estetický element slúžiaci na okrasu, ale opakovane sa používajú ako podpora riešenia rôznych typov problémov. Nie sú bezvýznamnou pomôckou, ktorá by mala len zrýchliť proces riešenia žiakov bez toho, aby tomu rozumeli. Práve naopak, vizuálne znázornenia pomáhajú žiakom pochopiť jadro problému a následne použiť stratégiu riešenia, ktorá bude stáť na pevnom koncepčnom základe. A aj keď sa Backmannovej vyjadrenia vzťahujú na rôzne typy vizuálnych znázornení, nakoniec sa vo svojej štúdii zamerala práve na využitie obdĺžnikových modelov, ktoré sa stali inšpiráciou aj pre praktickú časť našej diplomovej práce [21].

Na Slovensku nemajú tieto modely takú históriu ako v Singapore. Využitie tohto spôsobu grafickej reprezentácie pri riešení niektorých typov úloh môžeme nájsť v istej miere napríklad v učebniciach matematiky pre základné školy, ktorých autormi sú Ján Žabka a Pavol Černek [22]. Reálnou skutočnosťou však je, že množstvo učiteľov matematiky ich pri výučbe ani nepoužíva, pretože si neuvedomujú ich obrovský potenciál.

Obdĺžnikové modelovanie znamená tvorbu pravidelných obdĺžnikových dielikov, ktoré reprezentujú známe a neznáme množstvá a aj vzájomné vzťahy medzi týmito množstvami. Toto modelovanie pomáha študentom vizualizovať situáciu, hlbšie sa nad príkladom zamyslieť a tiež rozhodnúť sa, akú výpočtovú operáciu je vhodné použiť [20].

Dokonca aj použitie úplne jednoduchého obdĺžnikového modelu umožňuje študentom rýchlejšie pochopiť, že $a + b = c$ nepriamo hovorí, že $c - a = b$ a $c - b = a$.

Obrázok 4: Jednoduchý obdĺžnikový model



Zdroj: Vlastné spracovanie podľa: DRURY, Helen. How to Teach Mathematics for Mastery [online]. Oxford: University Press, 2018. s.150 [cit. 2020-11-27].

Tieto obdĺžnikové modely sú veľmi užitočné na reprezentáciu a samozrejme aj riešenie dvoch veľmi veľkých tried matematických problémov [20]:

- aritmetických,
- a algebraických úloh.

Práca s týmito modelmi prispieva u žiakov k prehĺbeniu porozumenia koncepčných vzťahov. Okrem toho obdĺžnikové modely môžu slúžiť ako základy pre štúdium formálnej algebry a pomôžu tak žiakom pri odvodzovaní, vytváraní a zjednodušovaní algebraických výrazov, či úprave rovníc [20].

V tejto kapitole sme mnohokrát spomenuli a vyzdvihli pozitíva vizualizácie, ako jednej zo stratégií riešenia slovných. Avšak na záver by sme chceli dodať, že v každom prípade treba dbať na individualitu myslenia žiakov a netrvať striktné na vizuálnom znázorňovaní slovných úloh. V prípade, že daný žiak je tak matematicky zdatný, že vie úlohu riešiť priamo, resp. takým spôsobom, ktorý je v porovnaní s vizualizáciou pre neho jednoduchší alebo v tom danom prípade aj rýchlejší, treba mu poskytnúť v tomto ohľade voľnosť a slobodu.

3 Zbierka slovných úloh

Táto kapitola tvorí jadro našej práce, kde sme zostavili zbierku vybraných slovných úloh z rôznych oblastí, avšak zamerali sme sa najmä na také úlohy, pri riešení ktorých by žiak vo väčšine prípadoch neuvažoval o vizualizácii ako o novej alternatíve riešenia. S veľkou pravdepodobnosťou by sa zameral skôr na zostavenie rovnice, resp. sústavy rovníc alebo by použil trojčlenku, či iný matematický nástroj.

Pri riešení nasledovných úloh sme využili rôzne typy vizuálnych znázornení. Čitateľ nájde úlohy riešené prostredníctvom Vennovho diagramu, pomocou úsečiek, grafu lineárnej funkcie, ale jadrom zbierky sú príklady, na riešenie ktorých sme použili tzv. „bar modely“ populárne najmä v singapurských učebniciach matematiky.

Úlohy sú roztriedené do niekoľkých tematických okruhov, ktoré formálne predstavujú jednotlivé podkapitoly. V týchto podkapitolách sme sa snažili úlohy usporiadať od jednoduchších po náročnejšie, avšak nie všade to bolo úplne jednoznačné, a preto takéto radenie nie je striktným pravidlom.

3.1 Úlohy o rovnomernom pohybe

1. Cyklista prejde za 3 hodiny 45 km.

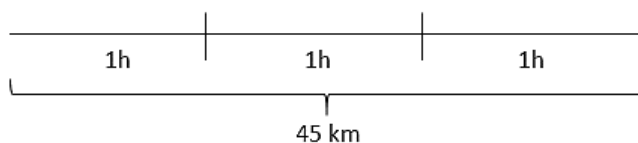
a) Koľko kilometrov prejde pri rovnakej rýchlosti za každú hodinu?

Grafické zobrazenie:

Budeme pracovať pomocou úsečkového zobrazenia (modelu):

Keďže vieme, že za 3 hodiny prejde cyklista 45 km, tak si jednu väčšiu úsečku rozdelíme na tri časti.

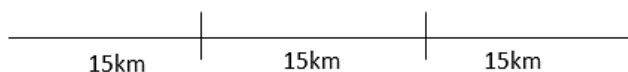
Každá časť predstavuje z hľadiska času 1 hodinu:



Riešenie:

Teda ak chceme zistiť, koľko km prejde cyklista za hodinu, musíme vydeliť celkovú dĺžku 45 km tromi.

$$45 : 3 = 15$$

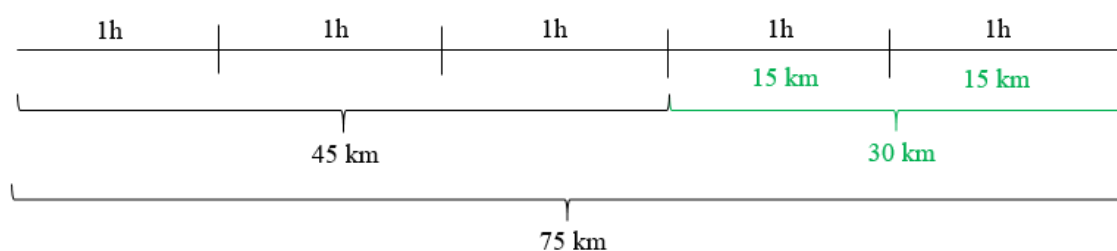
**Skúška správnosti:**

Ak za jednu hodinu prejde 15 km, tak za tri hodiny prejde pri rovnakej rýchlosti $15 \cdot 3 = 45$ km.

Odpoveď:

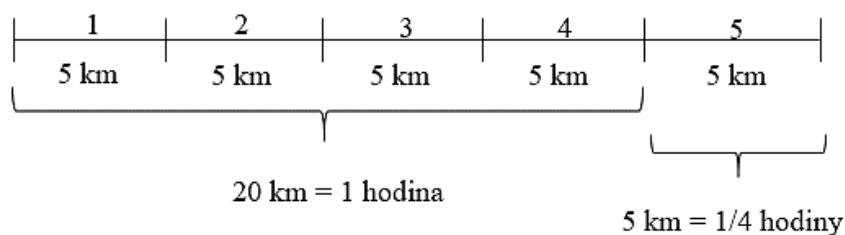
Pri rovnakej rýchlosti prejde cyklista za každú hodinu 15 km.

b) Koľko kilometrov prejde pri rovnakej rýchlosti za 5 hodín?

Riešenie:**Odpoveď:**

Keďže sme si v podotázke a) vypočítali, že za 1 hodinu prejde 15 km, tak zo znázorneného obrázka naozaj vidno, že za 5 hodín prejde cyklista 75 km.

2. Cyklista prešiel vzdialenosť 25 km priemernou rýchlosťou 20 km/h. Ako dlho mu trvala cesta? (KOMPARO 9 2011/12)

Grafická reprezentácia a riešenie:

Z obrázka už jednoznačne vyplýva, že ak prejsť 4 dieliky (ktoré predstavujú 20 km) trvalo cyklistovi 1 hodinu, tak prejsť zvyšný piaty dielik cesty trvalo $\frac{1}{4}$ hodiny (teda 15 minút).

Odpoveď:

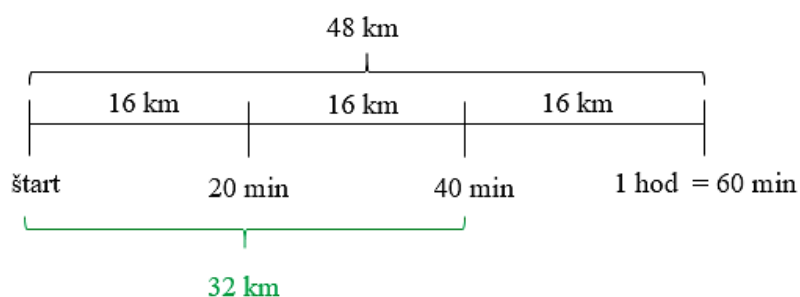
Cestu dlhú 25 km prešiel cyklista za čas 1h a 15 min.

3. *Motocyklista ide rýchlosťou 48 km/h. Koľko km prejde za 40 minút? (T9 - 2011)*

Grafické zobrazenie a riešenie:

Budeme znovu pracovať pomocou úsečkového zobrazenia.

Keďže vieme, že za 1 hodinu (60 minút) prejde cyklista 48 km a 40 minút predstavuje $\frac{2}{3}$ hodiny, rozdelíme si 48 km na tretiny.

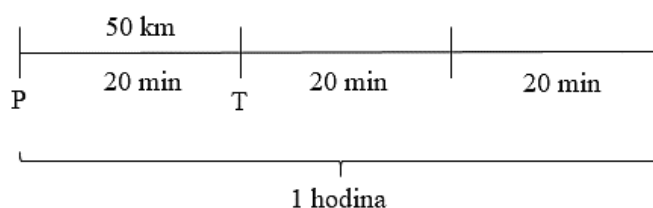


Odpoveď:

Motocyklista prejde za 40 minút 32 km.

4. *Akou rýchlosťou šiel pán Králik po diaľnici z Piešťan do Trnavy (vzdialenosť 50 km), ak mu to trvalo 20 minút?*

Grafické znázornenie a riešenie:



Keďže rýchlosť sa udáva v km/h, musíme teda zistiť koľko km prejde pán Králik za 1h.

Vieme, že 20 minút je $\frac{1}{3}$ z hodiny.

Za hodinu teda prešiel $3 \cdot 50 \text{ km} = 150 \text{ km}$.

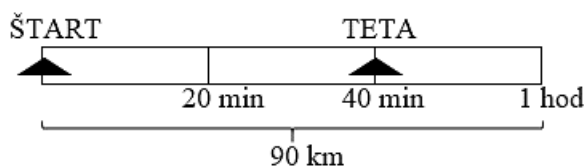
Odpoveď:

Pán Králik išiel rýchlosťou 150 km za hodinu.

5. *Vlakom, ktorý ide priemernou rýchlosťou 90 km/h, sa dostaneme k tete za 40 minút. Za aký čas by sme túto dráhu prešli na bicykli, keby sme šli priemernou rýchlosťou 20 km/h.*

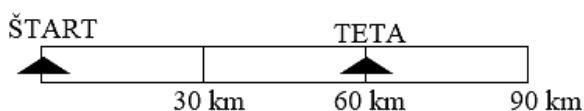
Grafická reprezentácia a riešenie:

Priemerná rýchlosť vlaku je 90 km/h a vieme, že 1/3 hodiny = 20 minút, teda:



Zo schémy naozaj vidno, že teta býva 60 km od miesta štartu, pretože ak 40 minút predstavuje 2/3 z hodiny, tak vzdialenosť, ktorú musíme k tete prejsť, musí byť 2/3 z 90 km.

Čo je v konečnom dôsledku 60 km.



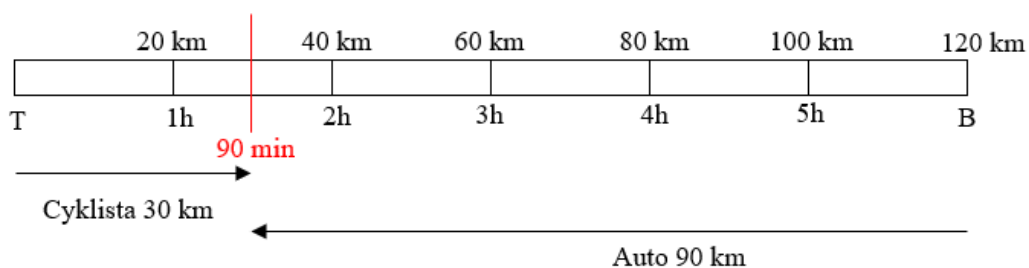
Ak by sme chceli ísť k tete na bicykli, ktorý ide rýchlosťou 20 km/h, tak by sme museli ísť $60 : 20 = 3$ hodiny.

Odpoveď:

Na bicykli by sme danú dráhu prešli za 3 hodiny.

6. *Trenčín je od Bratislavy vzdialený 120 km. Priemerná rýchlosť cyklistu idúceho z Trenčína je 20 km/h. Aká je priemerná rýchlosť auta, ktoré vyšlo z Bratislavy v rovnakom čase a s cyklistom sa stretli po 90 minútach. (T9 - 2010)*

Grafická reprezentácia:



Keďže cyklista ide rýchlosťou 20 km/h, tak za 90 minút (1,5 hodiny) prejde 30 km a auto prejde tých zvyšných $120 - 30 = 90$ km.

Riešenie:

Auto prejde 90 km za 90 minút, teda za 1 hodinu (pretože chceme zistiť rýchlosť auta km/h), ktorá predstavuje 60 minút prejde 60 km.

Odpoveď:

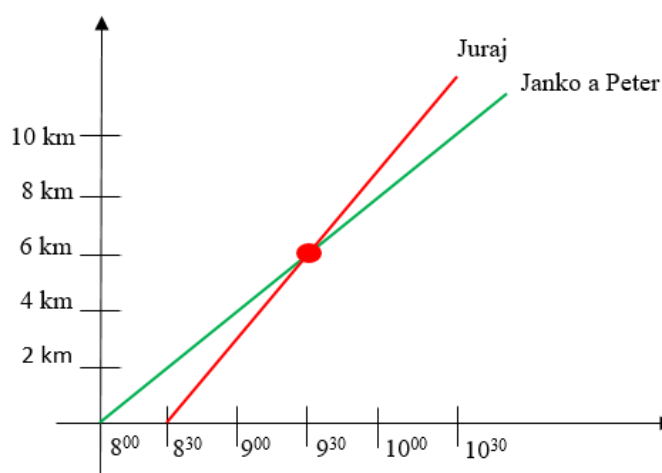
Priemerná rýchlosť tohto auta je teda 60 km/h.

7. Janko s Petrom sa vybrali na túru o 8. hodine. Išli priemernou rýchlosťou 4 km za hodinu. Juraj, ktorý vyšiel z toho istého miesta o pol hodiny neskôr, išiel o 2 km za hodinu rýchlejšie. Kedy dobehol Juraj kamarátov?

Takýto typ úloh už nenájdeme v učebniciach matematiky pre ZŠ, avšak je to veľmi pekný príklad, ktorý nemusíme riešiť sústavou dvoch rovníc, ale môžeme použiť graf, kde výsledkom bude bod v rovine (priesečník priamok). Daný príklad sme však zaradili do zbierky, aby sme ilustrovali aj takýto typ riešenia.

	8 ⁰⁰	8 ³⁰	9 ⁰⁰	9 ³⁰	10 ⁰⁰	10 ³⁰
Juraj	0 km	0 km	3 km	6 km	9 km	12 km
Janko a Peter	0 km	2 km	4 km	6 km	8 km	10 km

Grafické riešenie:



Priamky sa pretínajú v bode, ktorý na x-ovej osi predstavuje čas 9³⁰ a na y-ovej 6 km.

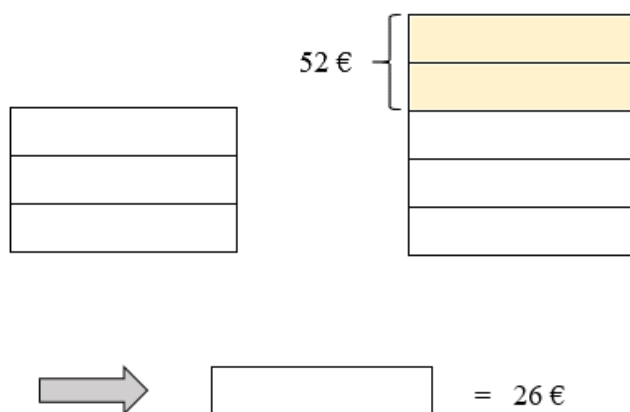
Odpoveď:

Juraj dobehol kamarátov o 9³⁰. Teda hodinu po tom, čo vyrazil.

3.2 Pomer

8. Dvaja robotníci si mali odmenu rozdeliť podľa množstva vykonanej práce v pomere 3:5. Jeden dostal o 52 € viac ako druhý. Koľko dostal ktorý?

Grafické znázornenie a riešenie:



Teda

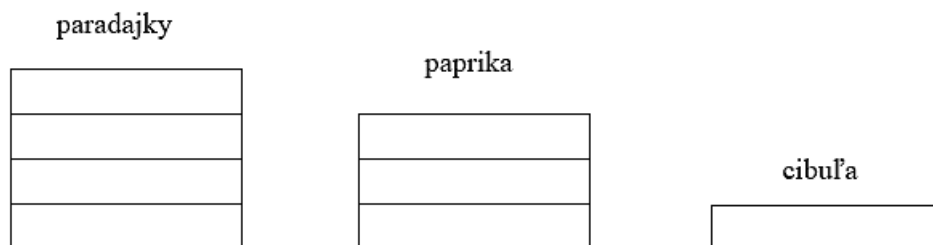
Jeden robotník		Druhý robotník	
26 €	} 78 €	26 €	} 130 €
26 €		26 €	
26 €		26 €	
		26 €	
		26 €	

Odpoveď:

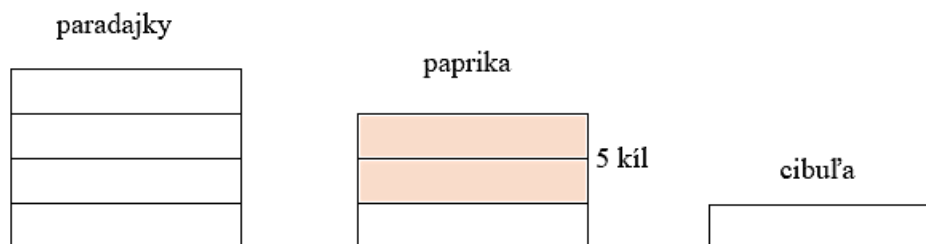
Jeden robotník zarobil 78 € a druhý 130 €.

9. V recepte na lečo sa odporúča zmiešať paradajky, papriku a cibuľu v pomere 4:3:1. Mamka už pripravila cibuľu a papriku, pričom cibule bolo o 5 kíl menej ako papriky. Koľko kilogramov paradajok bude potrebovať podľa tohto receptu? (T9 - 2017)

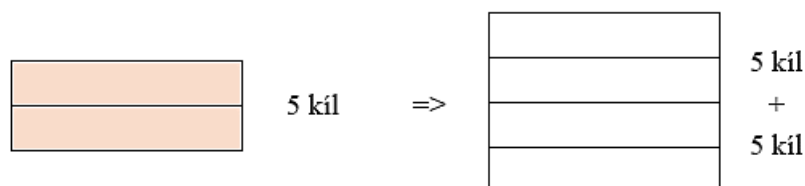
Grafické znázornenie a riešenie:



Cibule je o 5 kíl menej ako papriky



Dva obdĺžniky predstavujú 5 kíl

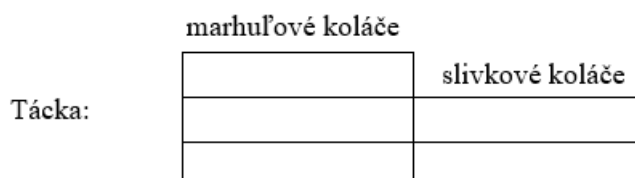


Odpoveď:

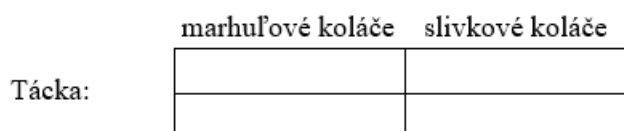
Na lečo budeme potrebovať 10 kíl paradajok.

10. Na tácke boli marhuľové a slivkové koláče v pomere 3:2. Po zjedení troch marhuľových koláčov je šanca vybratia slivkového aj marhuľového koláča rovnaká. Koľko bolo na začiatku na tácke koláčov? (T9 - 2017)

Grafické znázornenie a riešenie:



Zjedli sme 3 marhuľové koláče a šanca, že si teraz vyberieme slivkový koláč je rovnaká ako že si vyberieme marhuľový. Z toho vyplýva, že je teraz na tácke rovnako z oboch druhov:



Vidíme, že rozdiel oproti prvej schéme je jeden obdĺžnik a teda:



Odpoveď:

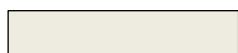
Na začiatku sme mali na tácke $5 \cdot 3 = 15$ koláčikov.

3.3 Úlohy o veku

11. Otec, matka a syn majú spolu 96 rokov. Matka je o 23 rokov staršia ako jej syn a o 5 rokov mladšia ako jeho otec. Koľko rokov má syn? (T9 - 2008)

Grafické znázornenie a riešenie:

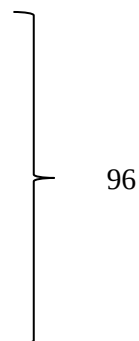
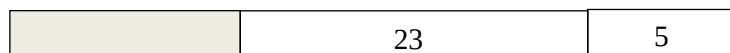
Vek syna:



Vek matky:



Vek otca:



Teda:



Odtiaľ vypočítame:

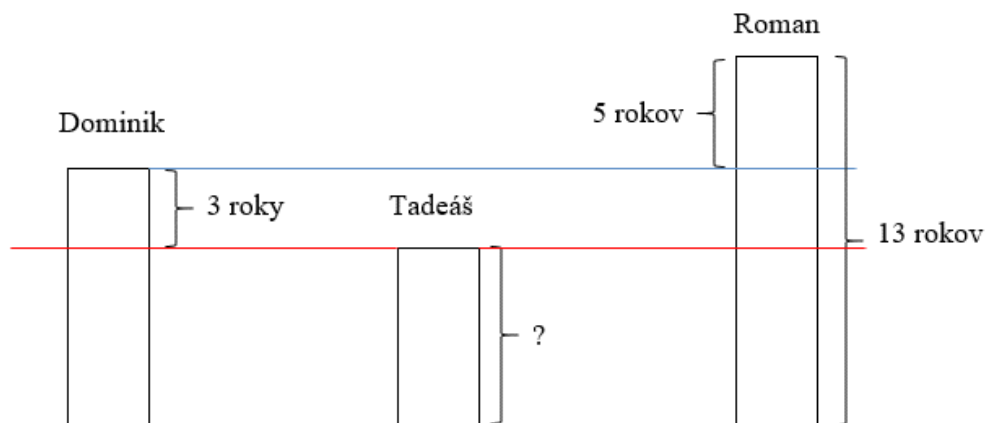
**Odpoveď:**

Syn má 15 rokov.

12. Dominik, Tadeáš a Roman majú narodeniny 1. novembra, avšak Dominik je o tri roky starší ako Tadeáš, ale taktiež o 5 rokov mladší ako Roman. Koľko rokov má Tadeáš, ak Roman má 13?

Grafická reprezentácia a riešenie:

Dominik má o 3 roky viac ako Tadeáš, ale o 5 menej ako Roman.



Z obrázku jednoznačne vyplýva, že Tadeáš má $13 - 5 - 3 = 5$ rokov.

Odpoveď:

Tadeáš má 5 rokov.

13. Linda a jej strýko Slávo majú narodeniny v ten istý deň. Pred niekoľkými rokmi mala Linda 13 a strýko 45 rokov. Pred koľkými to bolo, ak dnes je strýko Slávo trikrát starší ako Linda?

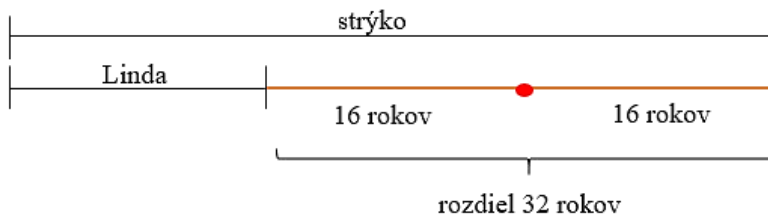
Grafický model a riešenie:

Kedysi



Dnes

Ak je Slávo trikrát starší, tak Lindin vek predstavuje tretinu zo strýkovho. Navyše vekový rozdiel medzi nimi sa nikdy nezmení, a teda tých 32 rokov predstavuje $\frac{2}{3}$ strýkovho veku.



Takže z úsečkovej schémy vyplýva, že dnes má Linda 16 rokov a strýko $3 \cdot 16 = 48$ rokov.

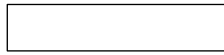
Odpoveď:

Pred tromi rokmi mal strýko 45 a Linda 13 rokov.

14. Eva má sestru, ktorá je o 4 roky staršia. Pred desiatimi rokmi bola sestra dvakrát staršia ako Eva. Koľko má Eva rokov?

Grafická reprezentácia a riešenie:

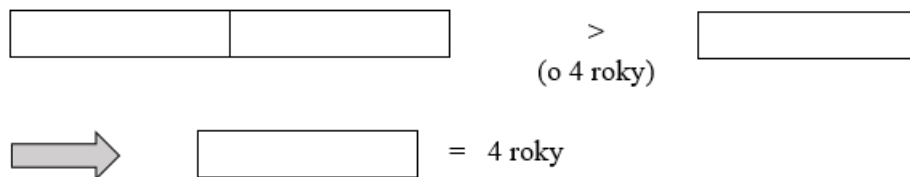
Znovu si znázorníme graficky vek Evy pred 10 rokmi:



Keďže sestra bola vtedy dvakrát staršia, grafická reprezentácia jej veku je:



V zadaní je taktiež spomenuté, že sestra je o 4 roky staršia. Tento ich vekový rozdiel sa nikdy nezmení, pretože vždy bude sestra o 4 roky staršia, nebolo to tak len pred 10 rokmi. Teda z toho vyplýva:



Takže vypočítali sme, že pred desiatimi rokmi mala Eva 4 roky a jej sestra 8 rokov. A keďže dnes sú o 10 rokov staršie, tak Eva má 14 rokov a sestra 18.

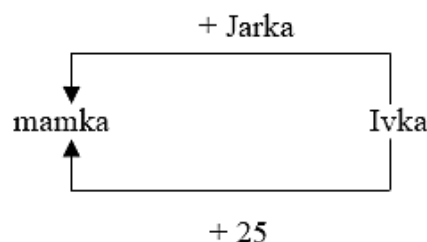
Odpoveď:

Eva má teraz 14 rokov.

15. Mamka má toľko rokov ako jej dve dcéry Jarka a Ivka dohromady. Mamka je zároveň o 25 rokov staršia od Ivky a vieme, že Ivka je o 4 roky mladšia od Jarky. Koľko rokov má Ivka a koľko mamka?

Grafická reprezentácia a riešenie:

Jarka + Ivka = mamka



Zo schémy vidieť, že Jarka má 25 rokov a keďže Ivka je o 4 roky mladšia má $25 - 4 = 21$.
A mamka má ako obe dcéry dokopy, teda $21 + 25 = 46$.

Odpoveď:

Ivka má 21 rokov a mamka 46 rokov.

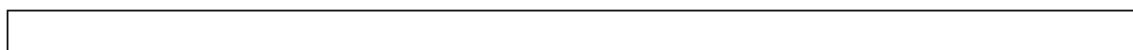
3.4 Zlomok ako časť celku

16. Janko si kúpil mobilný telefón. Dve tretiny ceny si zaplatil zo svojich úspor. Polovicu zvyšku mu preplatila sestra a zvyšných 40 € si musel požičať od kamaráta. Aká bola cena telefónu?

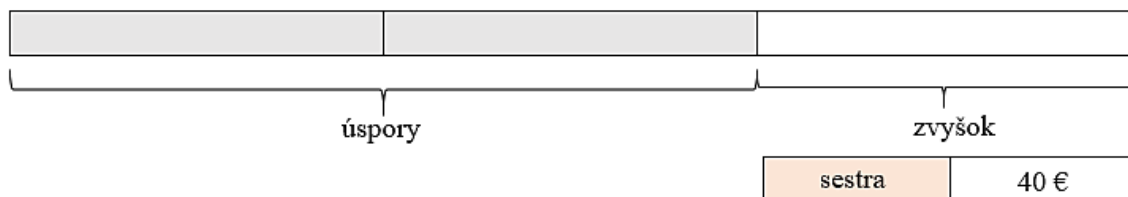
Grafická reprezentácia a riešenie:

Znovu si celkovú cenu mobilu môžeme znázorniť pomocou úsečkovej alebo inej schémy. My pre prehľadnosť využijeme znova obdĺžnikové dieliky.

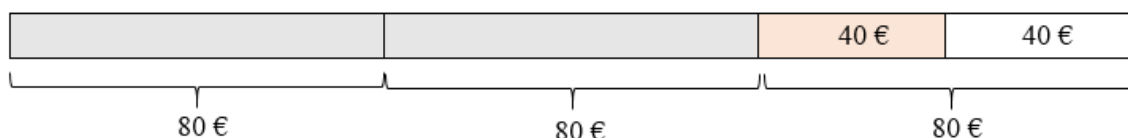
Cena celkom



Časť zaplatená z Jankových úspor



Teda

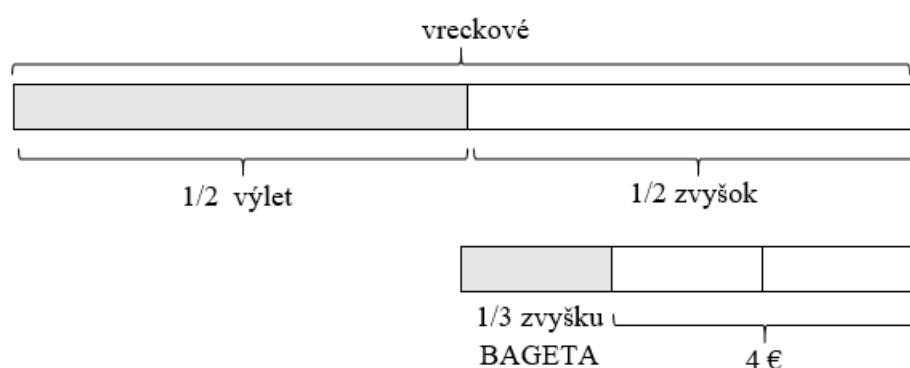


Odpoveď:

Mobilný telefón stál $80 \cdot 3 = 240$ €.

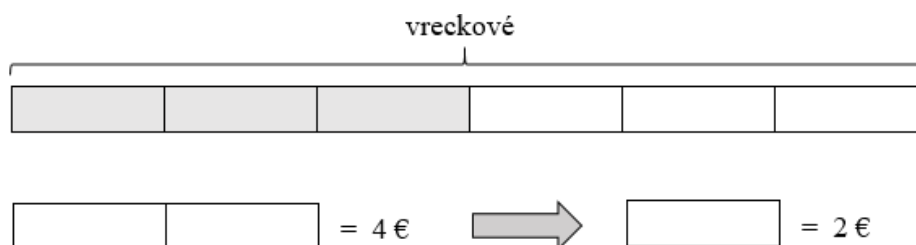
17. Mirka minula na výlete za darčeky polovicu vreckového. Za tretinu zvyšku si kúpila bagetu. Zostali jej 4 €. Koľko € vreckového Mirka dostala? (KOMPARO 9 2008/09)

Grafická reprezentácia:



Riešenie:

Vreckové sme si rozdelili na 6 rovnakých častí podľa hodnoty bagety.



Jeden dielik predstavuje 2 €, teda ak chceme vyrátať hodnotu celého vreckového musíme 2 € vynásobiť 6, pretože celé vreckové je znázornené 6 dielikmi.

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ €}$$

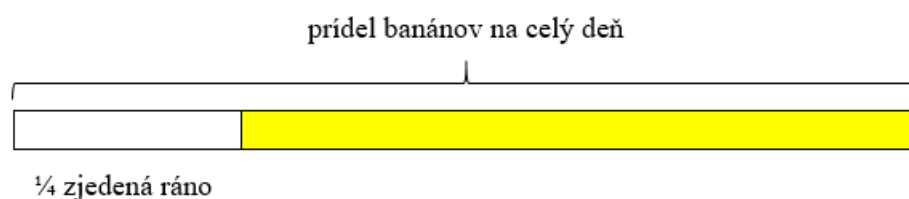
Odpoveď:

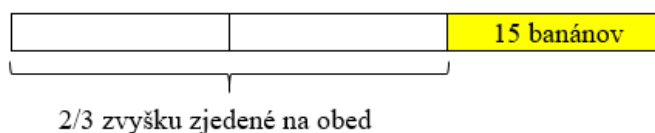
Mirka dostala 12 € vreckového.

18. V jednej ZOO majú opicu, ktorá sa kŕmi celý deň len banánmi. Každý deň jej dávajú rovnako veľa banánov. Ráno z nich zje štvrtinu, na obed dve tretiny zvyšku a na večeru jej zostane 15 banánov. Koľko banánov zje táto opica za celý deň?

(<http://www.matematikakuciakova.wbl.sk/Testy-cvicenia-pracovne-listy23.html>)

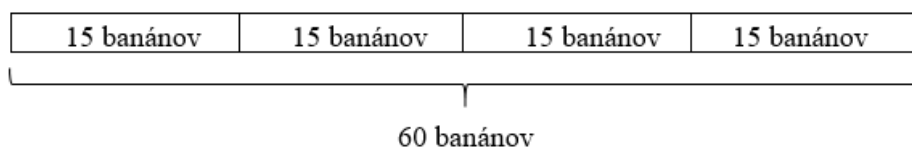
Grafický model a riešenie:





Vidíme, že jeden dielik predstavuje 15 banánov a z obrázka je jasné, že za 1 deň zje 4 takéto dieliky.

Teda z toho vyplýva, že za deň táto opica zje:

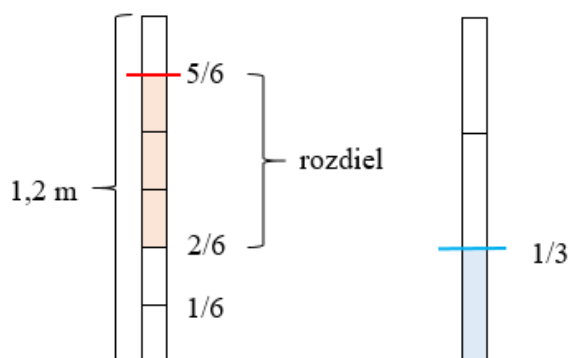


Odpoveď:

Opica za jeden deň zje 60 banánov.

19. Kovová tyč meria 1,2 metra. O koľko je jedna tretina tyče menšia ako päť šestín? (T9 - 2010)

Grafická reprezentácia:



Riešenie:

Jeden dielik tyče naľavo meria $1,2 : 6 = 0,2$ m. Z obrázka vidíme, že $5/6$ je o 3 dieliky viac ako $1/3$, teda tieto tri dieliky predstavujú $0,2 \cdot 3 = 0,6$ m, resp. je to zároveň aj polovica tyče.

Odpoveď:

Jedna tretina tyče je o 0,6 m menšia ako päť šestín.

3.5 Hľadanie najmenšieho spoločného násobku

20. Mišo chodieval hrať golf každé 3 dni. Juro si chodí zahrať každý 4. deň. Dnes sa stretli. Najskôr o koľko dní sa znovu stretnú?

Táto úloha patrí k slovným úlohám o hľadani najmenšieho spoločného násobku. Je samozrejmé, že v praxi sa často stretávame s oveľa väčšími číslami, a teda znázorniť takú úlohu je oveľa náročnejšie a možno nie úplne efektívne. Avšak riešenie niekoľkých „analogických“ jednoduchých slovných úloh pomocou grafického znázornenia, by malo žiakov viesť k správne mu pochopeniu logiky takýchto úloh. No a ak pochopia podstatu takýchto úloh, nebudú mať potom problém riešiť aj zložitejšie.

Grafický model:

Deň, kedy sa chlapci stretnú, si označíme fialovou farbou.

Deň, kedy príde na golf Mišo, žltou.

A deň, kedy príde Juro, zelenou.

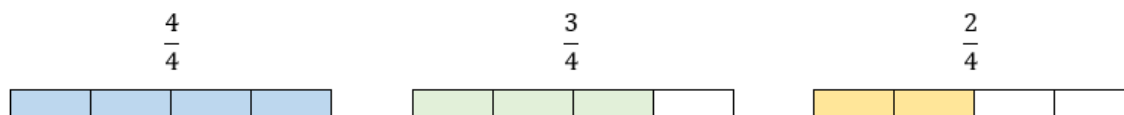


Riešenie a odpoveď:

Z obrázka si len jednoducho odčítame, že prejde 12 dní, pokým sa znovu stretnú.

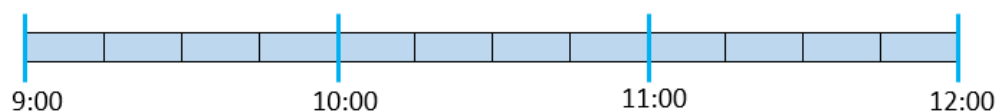
21. Na Oravskej priehrade zabezpečujú vyhlíadkové plavby tri lode s dĺžkou plavby hodina, 0,75 hodiny, 30 minút. Kedy sa prvýkrát stretnú v prístave, ak všetky tri vyplávajú o deviatej ráno?

V tejto úlohe ide opäť o nájdenie najmenšieho spoločného násobku čísel $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, resp. $\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}$, ktoré môžu byť reprezentované dĺžkami obdĺžnikov panelov, rozdelených na príslušný počet dielikov (prípadne stačí hľadať iba najmenší spoločný násobok čísel 2, 3 a 4). Vzhľadom na frekvenciu príchodov jednotlivých lodí do prístavu, bude najlepšie, keď jeden dielik bude reprezentovať 15 minút a teda obdĺžnik zložený zo štyroch dielikov bude predstavovať jednu hodinu.

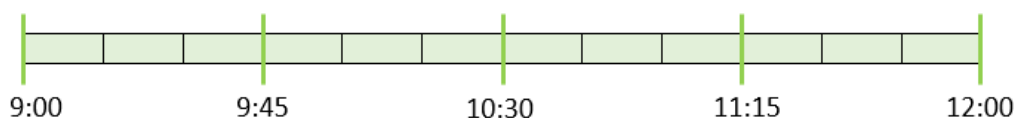


Úloha - určiť čas, kedy sa lode opäť stretnú, sa tak pretransformuje na určenie dĺžky dlhšej strany obdĺžnika, ktorého koncový bod je spoločným bodom celočíselných násobkov menších obdĺžnikov s dĺžkami 2,3, a 4 dieliky.

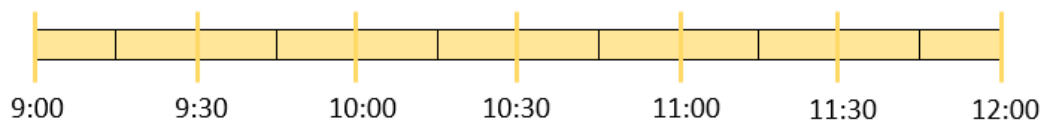
1. loď



2. loď



3. loď



Z obrázku je zrejmé, že obdĺžnik, ktorý spĺňa uvedenú podmienku má dĺžku 12 dielikov. Pretože 4 dieliky predstavujú jednu hodinu, lode sa tak prvýkrát stretnú v prístave o 3 hodiny po deviatej hodine, čiže o 12:00.

Iný schematický model, ktorým sa úlohy tohto typu efektívne a zároveň jednoducho riešia, predstavuje tabuľka:

Čas príchodu lodí do prístavu

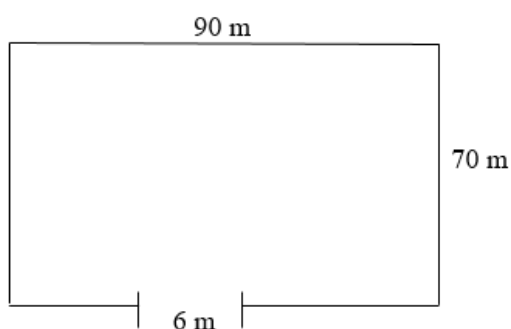
LOĎ 1	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
LOĎ 2	9:00	9:45	10:30	11:15	12:00	12:45	13:30
LOĎ 3	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00

Odpoveď:

Lode sa prvýkrát stretnú o 12:00.

3.6 Geometrická slovná úloha

22. Farmár postavil plot okolo pozemku, ktorý má tvar obdĺžnika s rozmermi 90 m a 70 m. Na jednej strane pozemku nechal miesto na bránu so šírkou 6 m bez oplatenia. Vypočítajte dĺžku celého plota v metroch. (KOMPARO 5 - 2019)

Grafické znázornenie a riešenie:

Ide o jednoduchú geometrickú úlohu, kde najskôr vypočítame obvod obdĺžnika a následne odčítame 6 m.

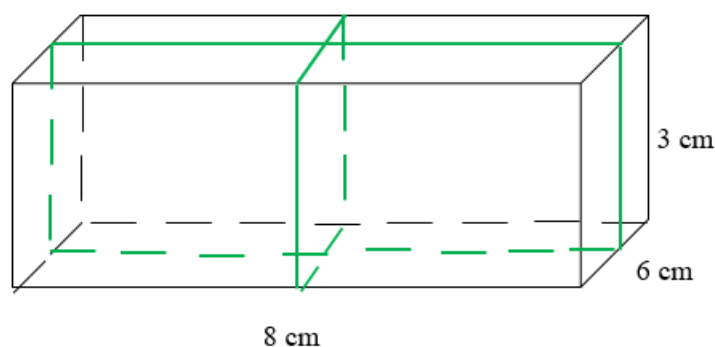
$$\text{Teda } 90 + 90 + 70 + 70 - 6 = 314 \text{ m}$$

Odpoveď:

Dĺžka plotu je 314 m.

23. Stačí 40 centimetrov stuhy na previazanie škatuľky s rozmermi 8 cm, 6 cm a 3 cm?

V tomto prípade ide o geometrickú slovnú úlohu, ktorej riešenie by bolo bez obrazovej reprezentácie omnoho náročnejšie a takisto by riešiteľ ľahko sklzol k chybnému výsledku.

Grafická reprezentácia a riešenie:

Z obrázka jasne vidíme kadiaľ musí stuha prejsť, aby bola škatuľka previazaná a teda stačí už len sčítať príslušné rozmery škatule (inými slovami, stačí vypočítať obvody vyznačených obdĺžnikov).

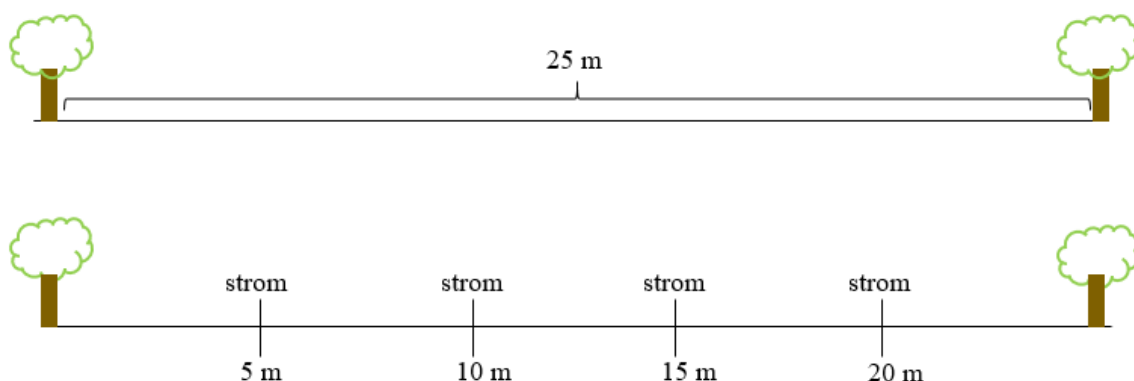
$$8 + 8 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16 + 12 + 6 + 6 = 40 \text{ cm}$$

Odpoveď:

Stačí 40 cm na previazanie škatule.

24. Na oboch koncoch priamej cesty a tiež každých 5 metrov muž zasadil strom. Dĺžka cesty je 25 metrov. Koľko stromov muž vysadil?

Grafická reprezentácia a riešenie:



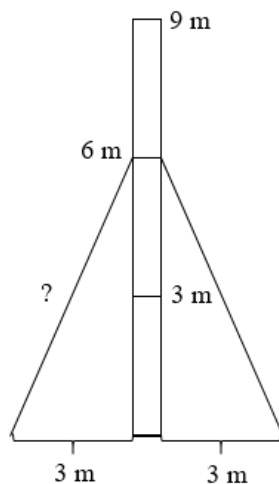
Odpoveď:

Muž vysadil 6 stromov.

25. Stožiar vysoký 9 m je v dvoch tretinách svojej výšky ukotvený k zemi dvomi lanami. Ukotvenie lán v zemi je 3 metre ďaleko od päty stožiara. Aké dlhé sú kotviace laná?

(<https://www.viemematiku.sk/slovni-ulohy-pythagorova-diagramy-3-uroven/1363>)

Grafická reprezentácia:



Riešenie:

Z nákresu vidíme, že nám vznikol pravouhlý trojuholník, pričom kotviace lano predstavuje preponu tohto trojuholníka. Na výpočet teda použijeme Pytagorovu vetu.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = 3 \text{ m}, b = 6 \text{ m}, c = ?$$

$$3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Odpoveď:

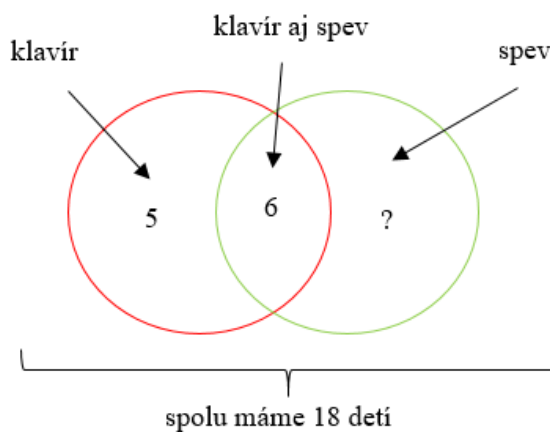
Kotviace lano má dĺžku $3\sqrt{5}$ m.

3.7 Vennove diagramy

26. Na hodiny klavíra a spevu v základnej umeleckej škole sa prihlásilo 18 prváčikov. Jedenásť z nich chodí na hodiny klavíra a šiesti chodia na klavír aj na spev. Koľko je takých, čo chodia len na hodiny spevu?

Grafické znázornenie a riešenie:

Na riešenie takýchto úloh je najefektívnejšie použiť Vennov diagram.

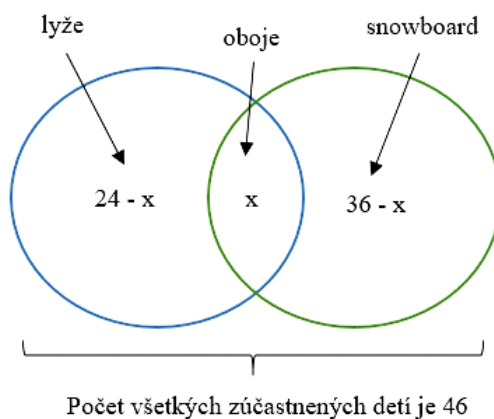


Odpoveď:

Len na hodiny spevu chodí $18 - 5 - 6 = 7$ detí.

27. Lyžiarskeho výcviku sa zúčastnilo 46 detí zo základnej školy. 24 detí sa naučilo jazdiť na lyžiach a 36 na snowboarde. Koľkí sa naučili jazdiť na oboch?

Grafické znázornenie:



Riešenie:

Keďže má tento príklad náročnejšie položenú otázku, tak si počet detí, ktoré vedia jazdiť na lyžiach aj snowboarde označíme ako neznámu x . Potom už využitím Vennovho diagramu jednoducho zostavíme rovnicu s neznámou x . Aj keď na riešenie úlohy použijeme rovnicu, Vennov diagram nám uľahčí jej zostavenie a zníži pravdepodobnosť chybného výsledku.

$$(24 - x) + x + (36 - x) = 46$$

$$60 - x = 46$$

$$x = 14$$

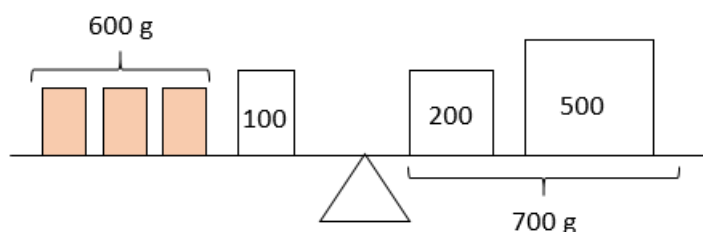
Odpoveď:

Aj na lyžiach aj na snowboarde sa naučilo jazdiť 14 detí.

3.8 Rovnice a sústavy rovníc

28. Na jednej strane váhy sú tri poháre džemu a 100 g závažie. Na druhej strane sú dve závažia s hmotnosťou 200 g a 500 g. Váhy sú v rovnováhe. Koľko g váži jeden pohár džemu?

(<http://static.jellejolles.nl/Boonen-et-al.-2013-What-underlies-successful-word-problem-solving-A-path-analysis-in-sixth-grade-students.pdf>)

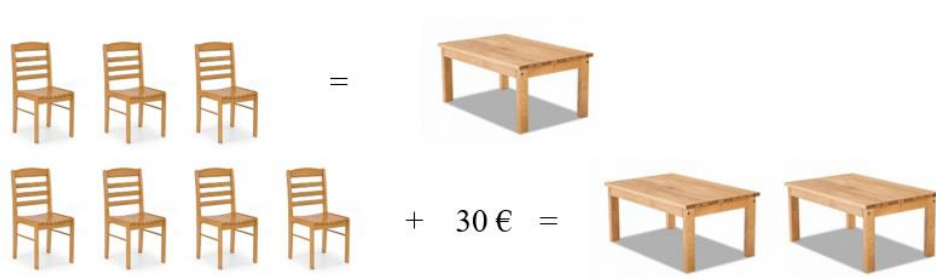
Grafická reprezentácia a riešenie:

Ak ti poháre džemu vážia 600 g, tak jeden pohár musí vážiť $600 : 3 = 200$ g.

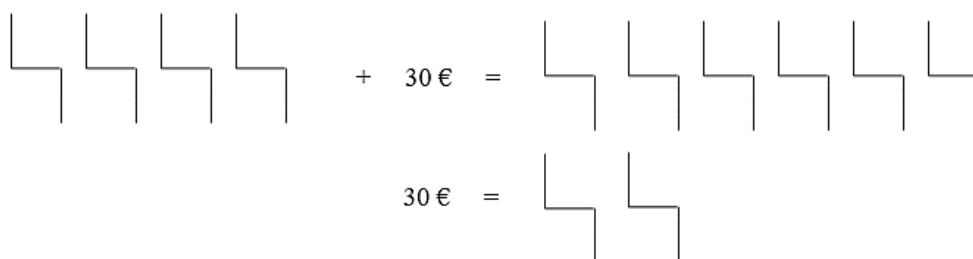
Odpoveď:

Jeden pohár džemu váži 200 g.

29. Jeden stôl stojí toľko ako tri stoličky. Dva stoly stoja toľko ako štyri stoličky a ešte 30 €. Koľko € stojí jedna stolička? (PANGEA 2013)

Grafické znázornenie:**Riešenie:**

Využijeme informáciu, že cena troch stoličiek je rovnaká ako cena jedného stola.



Využijeme informáciu, ktorú nám ponúka vyššie uvedená schéma. Ak dve stoličky stoja 30 €, tak jedna stolička bude stáť $30 : 2 = 15$ €.

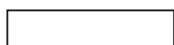
Odpoveď:

Cena jednej stoličky je 15 €.

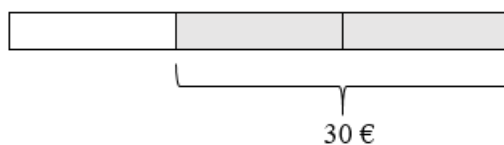
30. Barborka si do školy zobrala batoh, ktorý bol trikrát drahší ako vrecko s prezuvkami. Ak by bol batoh o 30 € lacnejší, stál by rovnako ako vrecúško. Koľko stál batoh? (T9 - 2010)

Grafický model:

Cena vrecka na prezuvky



Cena batohu

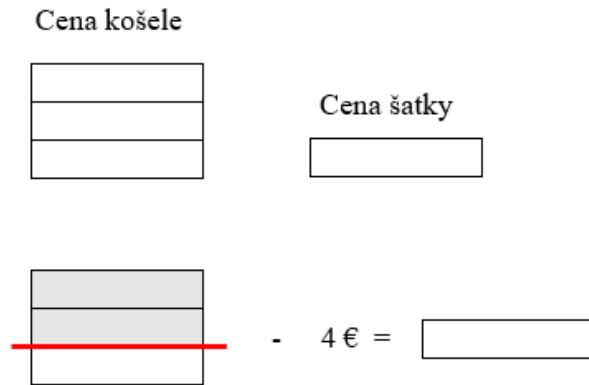
**Riešenie:**

Znovu ak dva dieliky predstavujú 30 €, tak jeden dielik predstavuje 15 €. A keďže podľa zadania je batoh znázornený tromi dielikmi, tak jeho hodnota je $15 \cdot 3 = 45$ €.

Odpoveď:

Batoh stál 45 €.

31. Košeľa stojí trikrát toľko ako šatka. Keby košeľa zlacnela o 4 €, stála by toľko čo šatka. Kolko košiel' možno kúpiť za 60 €.

Grafická reprezentácia:**Riešenie:**

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = 4 \text{ €} \implies \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = 2 \text{ €}$$

Teda šatka stojí 2 € a košeľa stojí 6 €.

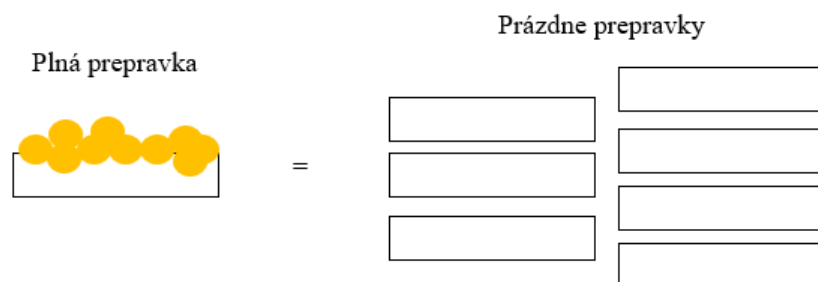
Otázka však bola, že koľko košiel' vieme kúpiť za 60 €.

$$60 : 6 = 10$$

Odpoveď:

Za 60 € môžeme kúpiť 10 košiel'.

32. Prepravka s ovocím je sedemkrát ťažšia ako prázdna prepravka. Naplnená prepravka váži o 30 kg viac ako prázdna. Kolko kg váži prázdna prepravka ? (<http://www.matematikakuciakova.wbl.sk/Testy-cvicenia-pracovne-listy23.html>)

Grafické zobrazenie a riešenie:



$$= 30 \text{ kg} + \boxed{}$$

$$= 30 \text{ kg} \rightarrow \boxed{} = 5 \text{ kg}$$

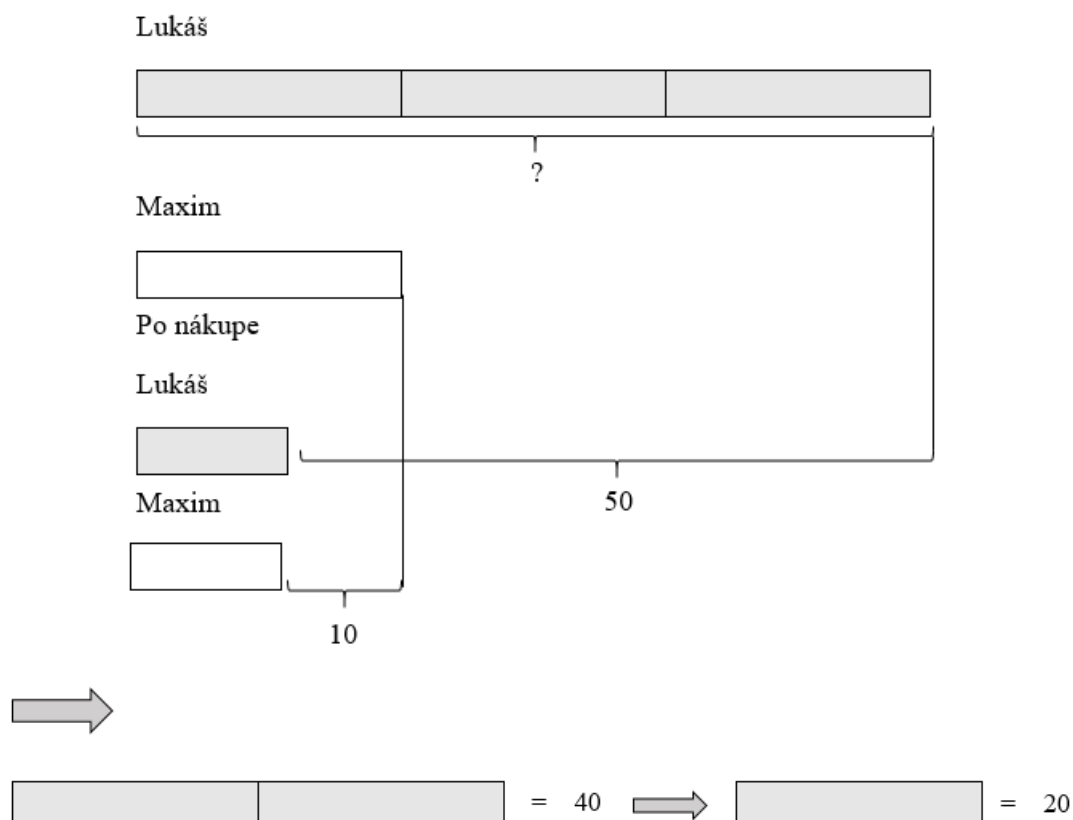
Teda 6 prázdnych prepraviek váži 30 kg. Potom 1 prázdna váži $30 : 6 = 5 \text{ kg}$.

Odpoveď:

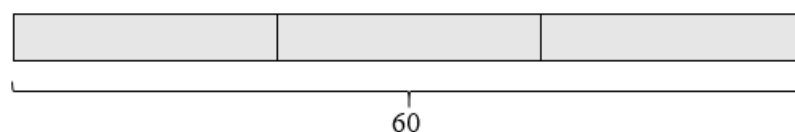
Prázdna prepravka váži 5 kilogramov.

33. Lukáš si na víkendovej brigáde zarobil trikrát viac ako Maxim. Chlapci však šli hneď, ako dostali peniaze do obchodného domu, kde Lukáš minul 50 € a Maxim 10 €. No a nakoniec si domov odniesli rovnakú čiastku peňazí. Koľko si pôvodne Lukáš zarobil?

Grafická reprezentácia a riešenie:



Pôvodný Lukášov zárobok

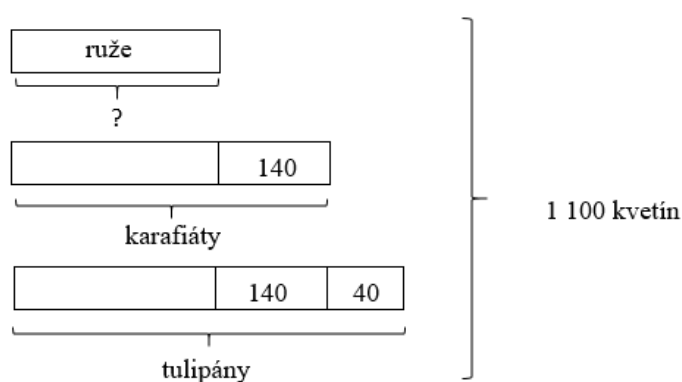


Odpoveď:

Lukáš si na brigáde zarobil 60 €.

34. V mestskom parku vysadili 1 100 kvetiniek. Šípových ruží je o 140 menej ako karafiátov a tulipánov o 40 viac ako karafiátov. Koľko kvetov vysadili z každého druhu?

Grafická reprezentácia a riešenie:



ruže	ruže	ruže
------	------	------

 + 140 + 140 + 40 = 1 100

ruže

 = 260

$$\text{Tulipány} = 260 + 140 + 40 = 440$$

$$\text{Karafiáty} = 260 + 140 = 400$$

Odpoveď:

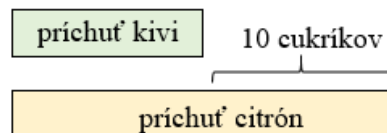
V parku vysadili 400 karafiátov, 440 tulipánov a 260 šípových ruží.

35. Zmes ovocných cukríkov obsahuje cukríky s príchutou pomarančovou, citrónovou a kivi. Citrónových je o 10 viac ako kivi, pomarančových trikrát viac ako kivi, ale presne toľko ako kivi a citrónových spolu. Koľko ktorých cukríkov obsahuje cukríková zmes.

Grafická reprezentácia a riešenie:

Máme tri druhy cukríkov.

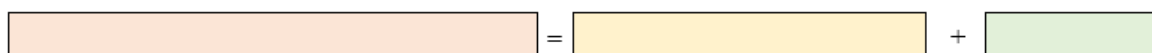
Vieme, že citrónových je o 10 viac ako kivi.



Ďalej vieme, že pomarančových je 3-krát viac ako kivi.



Ale tiež vieme, že pomarančových je rovnako ako kivi a citrónových dokopy.



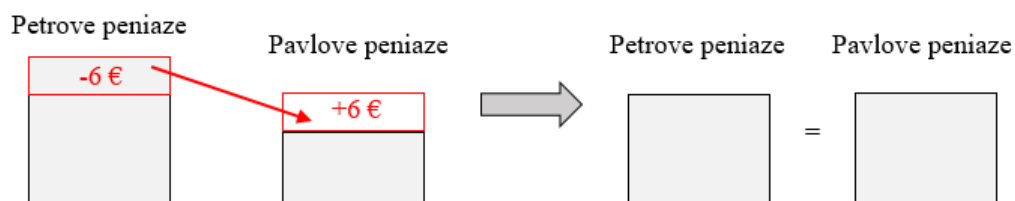
Odpoveď:

Počet cukríkov kivi v ovocnej zmesi je 10 cukríkov. Ďalej, ak citrónových je o 10 viac, tak potom takých je 20 a pomarančových je trikrát toľko, čo kivi, teda 30.

36. Ak dá Peter Pavlovi 6 €, budú mať rovnakú sumu. Ak dá Pavol Petrovi 6 €, bude mať Peter päťkrát viac ako Pavol. Koľko eur má každý z nich?(M9)

Grafická reprezentácia a riešenie:

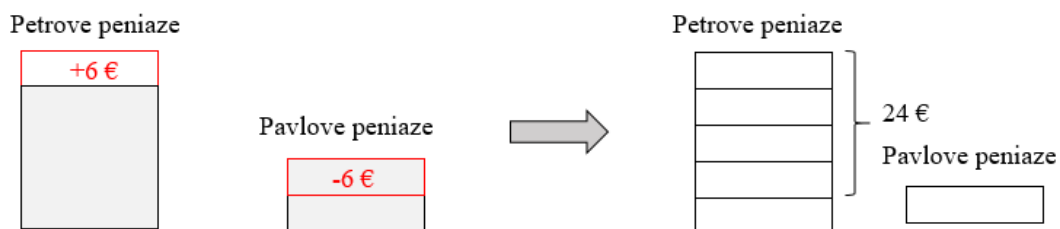
Ak dá Peter Pavlovi 6 €, budú mať rovnakú sumu



Z obrázku je zrejmé, že pôvodne mal Peter o 12 € (6 € a 6 €) viac ako Pavol.

Ak nastane opačná situácia a Pavol dá Petrovi 6 €, bude mať Peter päťkrát viac ako Pavol.

V tomto prípade už rozdiel nebude 12 €, ale Pavol bude mať ešte o 6 € menej a Peter ešte o 6 € viac. Teda rozdiel bude 24 € (12 € a 12 €).



Takže ako môžeme vidieť v schéme, rozdiel medzi hodnotou Petrových a Pavlových peňazí je 24 €, čo sú 4 obdĺžnikové dieliky.

Z toho zistíme koľko peňazí predstavuje jeden dielik: $24 : 4 = 6$ €.

Teraz už len musíme zistiť, koľko € mali chlapci pôvodne.

Zo schémy vidíme, že Pavol mal pôvodne **12 €** a Peter **24 €**.

Odpoveď:

Peter má 24 € a Pavol má 12 €.

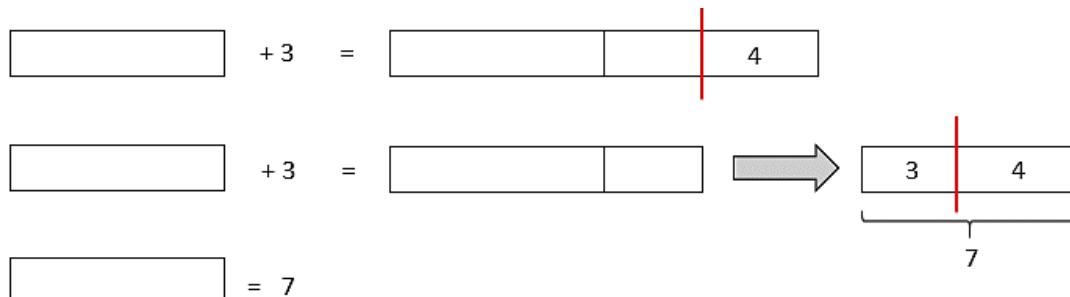
3.9 Myslím si číslo

37. *Myslím si číslo, ak k nemu pripočítam 3, dostanem práve toľko, ako keď od jeho dvojnásobku odčítam 4.*

Grafická reprezentácia a riešenie

Myslené číslo

Ak k nemu pripočítam 3, budem mať rovnako, ako keď od dvojnásobku odčítam 4.



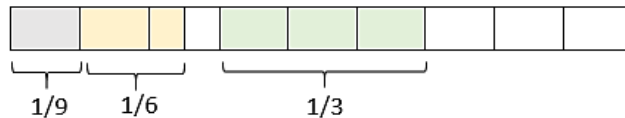
Odpoveď:

Myslím si číslo 7.

38. Ktoré číslo si myslím, ak jeho devätina zväčšená o jeho šestinu sa rovná jeho tretine zmenšenej o 3.

Grafická reprezentácia a riešenie:

Myslené číslo



$$\boxed{\text{grey}} + \boxed{\text{yellow}} + \boxed{\text{yellow}} = \boxed{\text{green}} + \boxed{\text{green}} + \boxed{\text{green}} - 3$$

Teda

$$\boxed{\text{yellow}} = 3 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{grey}} = 6$$

Myslené číslo je $6 \cdot 9 = 54$

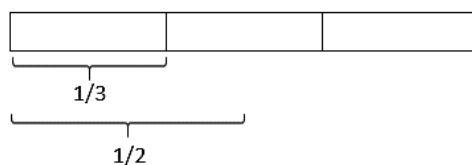
Odpoveď:

Myslím si číslo 54.

39. Myslím si číslo, ak k jeho tretine pripočítam jeho polovicu a tento súčet zväčším o 6, dostanem číslo, ktoré si myslím.

Grafická reprezentácia a riešenie:

Myslené číslo



$$\boxed{\text{1/3}} + \boxed{\text{1/2}} + 6 = \boxed{\text{1/2}} \mid 6 \mid \boxed{\text{1/3}}$$



$$\boxed{12} \longrightarrow \boxed{12} \mid \boxed{12} \mid \boxed{12}$$

36

Odpoveď:

Myslené číslo je 36.

3.10 Viac, menej, rovnako

40. Za 6 čokolád zaplatíme o 2 € viac ako za 4 čokolády. Koľko stojí 11 rovnakých čokolád?
(PANGEA 2013)

Grafické znázornenie:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = 2 \text{ €} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Riešenie:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \diagdown & \diagdown & \\ \hline \diagdown & \diagdown & \\ \hline \end{array} = 2 \text{ €} + \begin{array}{|c|c|} \hline \diagdown & \diagdown \\ \hline \diagdown & \diagdown \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = 2 \text{ €}$$

Zo schémy je vidieť, že ak za 2 čokolády zaplatíme 2 €, tak 1 čokoláda stojí 1 €. Teda 11 čokolád bude stáť $11 \cdot 1 = 11 \text{ €}$.

Odpoveď:

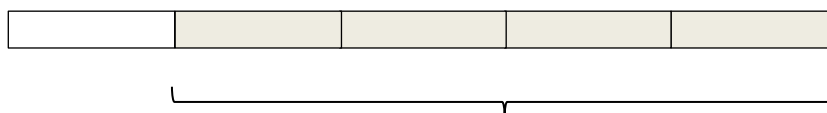
Za 11 čokolád zaplatíme 11 €.

41. Fero sa chválil, že na brigáde zarobil 5-krát viac eur ako Jožo. Jožo vedel, že zarobil len o 40 € menej ako Fero. Koľko zarobil ktorý?

Matematický model a riešenie:

Jožov zárobok

Ferov zárobok



Tieto 4 dieliky predstavujú 40 €, potom 1 dielik predstavuje 10 €.

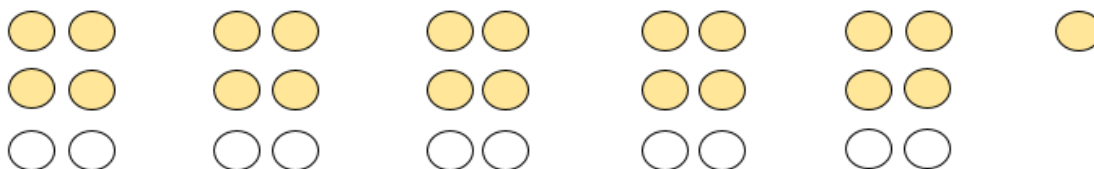
Odpoveď:

Jožo zarobil 10 € a Fero zarobil 50 €.

42. Ak si zoberiete 6 kusov tovaru, zaplatíte len za 4 kusy. Jeden kus tohto tovaru stojí 7 €. Maja má v košíku 31 kusov. Koľko eur zaplatila? (T9 - 2016)

Grafická reprezentácia a riešenie:

Tovar, ktorý má Maja v košíku, si rozdelíme do 6-kusových kôpok a v každej si farebne vyznačíme, za ktoré kusy zaplatíme.



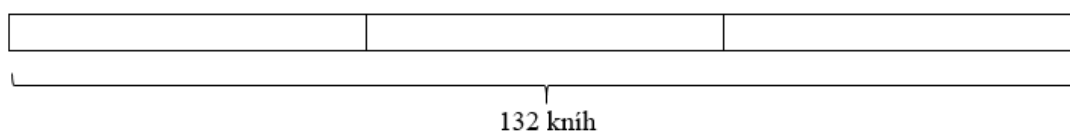
Z takejto schémy ľahko prečítame, za koľko výrobkov musí Maja zaplatiť: $4 \cdot 5 + 1 = 21$ ks.

Ak jeden ks stojí 7 €, tak $21 \cdot 7 = 147$ €.

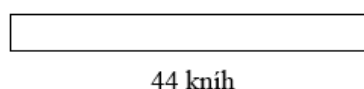
43. Eugen má o 27 kníh viac ako Daniela, ale 3-krát menej ako Tomáš. Tomáš má 132 kníh. Koľko má Daniela? (T9 - 2014)

Grafické zobrazenie a riešenie:

Tomáš:



Eugen 3-krát menej ako Tomáš



Daniela o 27 menej ako Tomáš



$$44 - 27 = 17$$

Odpoveď:

Daniela má 17 kníh.

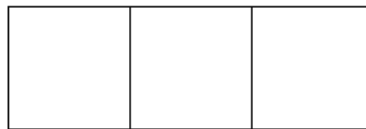
44. Otec rozdelil rodinné pozemky tak, že starší syn dostal trikrát väčšiu časť ako mladší syn. Neskôr však starší syn daroval 2,5 ha polí mladšiemu, a tak mali obaja rovnako. Aká je celková plocha rodinných pozemkov?

Grafická reprezentácia a riešenie:

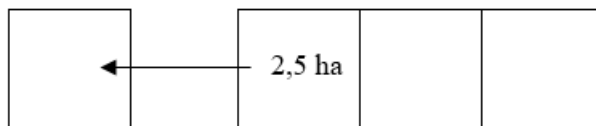
Plocha pozemku mladšieho syna



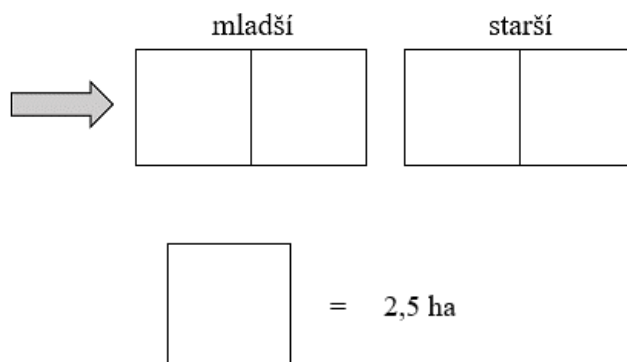
Plocha pozemku staršieho syna



Ak dá starší mladšiemu 2,5 ha, budú mať rovnako.



Odtiaľ vyplýva, že jeden dielik predstavuje 2,5 ha.



Odpoveď:

Celková plocha rodinných pozemkov je $4 \cdot 2,5 = 10$ ha.

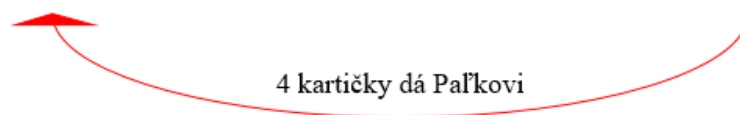
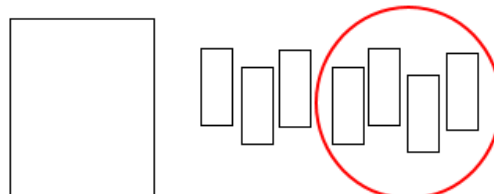
45. Peťko a Paľko zbierali kartičky hokejistov. Peťko mal o 7 kartičiek viac ako Paľko. Chlapci však uzavreli stávkú, ktorú vyhral Paľko a preto mu musel Peťko dať 4 kartičky. Ktorý z kamarátov mal teraz hokejových kartičiek viac a o koľko?

Grafické zobrazenie a riešenie:

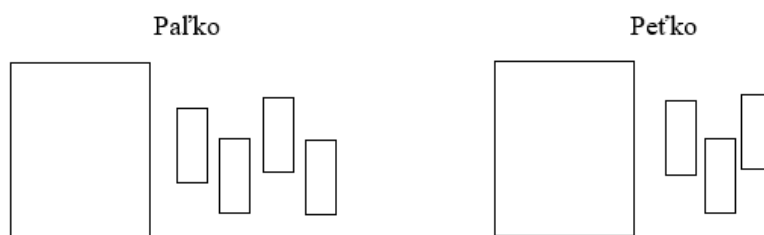
Množstvo Paľkových kartičiek



Množstvo Peťkových kartičiek



Potom



Odpoveď:

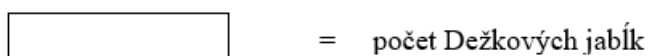
Ako vidieť v schéme, po stávke má Paľko o 1 kartičku viac.

46. *Sťažoval sa ježko Dežko kamarátovi: „Keby som si nazbieral štyrikrát viac jabĺčok, ako som si nazbieral, mal by som o 84 jabĺčok viac, ako mám teraz.“ Koľko jabĺčok si ježko Dežko nazbieral?*

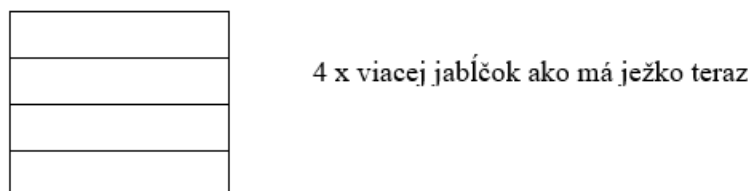
(<http://www.matematikakuciakova.wbl.sk/Testy-cvicenia-pracovne-listy23.html>)

Grafické znázornenie a riešenie:

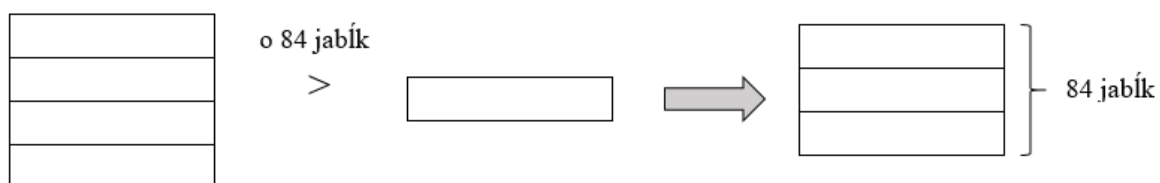
Ježkov výrok si skúsime znázorniť graficky. Pomocou dielika si vyjadríme, koľko jabĺčok má teraz Dežko.



Keby nazbieral 4-krát viac, mal by o 84 jabĺk viacej.



Teda



Ak chceme teraz zistiť, koľko jabĺčok predstavoval náš dielik, musíme číslo 84 vydeliť tromi.

$$84 : 3 = 28$$

Odpoveď:

Ježko Dežko si nazbieral 28 jablák.

47. Marek chcel kúpiť 4 čokolády, ale chýbalo mu 30 centov. Kúpil si teda tri čokolády a žuvačku za 20 centov a ešte mu ostalo 70 centov. Koľko stála čokoláda? Koľko mal Marek eur?

Grafické znázornenie a riešenie:

Keby kúpil 4 čokolády, chýbalo by mu 30 centov.

$$\begin{array}{c} 4 \text{ čokolády} \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \end{array} = \begin{array}{c} \text{Marekove peniaze} \\ \square \end{array} + 0,30 \text{ €}$$

Keby kúpil len tri čokolády, z jeho peňazí by mu ostalo 70 centov a 20 centov dal za žuvačku, teda bez žuvačky by mu ostalo 90 centov.

$$\begin{array}{c} 3 \text{ čokolády} \\ \square \quad \square \quad \square \end{array} = \begin{array}{c} \text{Marekove peniaze} \\ \square \end{array} - 0,90 \text{ €}$$

Zoberieme si tieto dve rovnosti a upravíme si ich tak, aby sme ľahko videli v čom sa líšia.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \end{array} + 0,90 \text{ €} = \begin{array}{c} \text{Marekove peniaze} \\ \square \end{array} \\ \begin{array}{c} \square \quad \square \quad \square \end{array} \quad \begin{array}{c} \square \end{array} - 0,30 \text{ €} = \begin{array}{c} \text{Marekove peniaze} \\ \square \end{array} \end{array}$$

Z obrázku vidíme, že $0,90 \text{ €} = \text{ČOKOLÁDA} - 0,30 \text{ €}$.

Teda hodnota 1 čokolády 1,20 €. A ešte chceme zistiť koľko mal Marek eur. Takže, ak vieme, že množstvo Marekových peňazí je cena 3 čokolád a 90 centov, ktoré by mu po kúpe týchto troch čokolád zostali, tak:

$$\begin{array}{c} \text{Marekove peniaze} \\ \square \end{array} = 3 \cdot 1,20 \text{ €} + 0,90 \text{ €} = 4,50 \text{ €}$$

Odpoveď:

Cena čokolády je 1,20 €. A množstvo Marekových peňazí je 4,50 €.

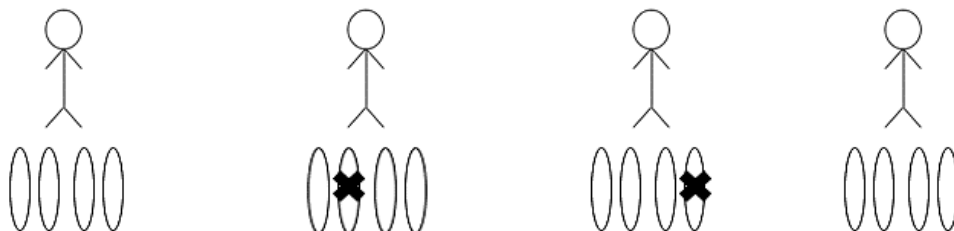
3.11 Úlohy so špeciálnym obsahom na logiku

48. Pani Daniela kúpila pre každého člena svojej štvorčlennej rodiny štyri kukurice. Využila pri tom akciu:

1 ks za 20 centov

Každá šiesta kukurica ZDARMA

Koľko € zaplatila? (KOMPARO 9 2011/12)

Grafická reprezentácia:

Z obrázka vidíme, že pani Daniela zaplatí len za 14 ks kukuríc po 20 centov.

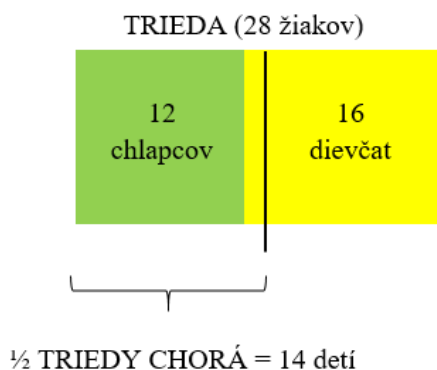
Riešenie:

$$14 \times 0,20 \text{ €} = 2,80 \text{ €}$$

Odpoveď:

Pani Daniela zaplatila 2,80 eur.

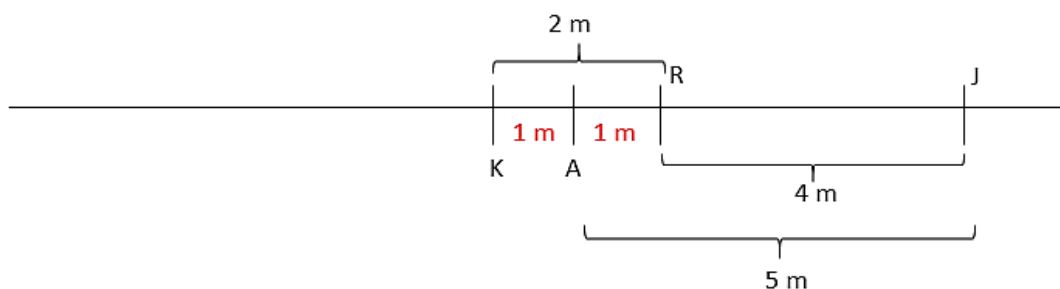
49. Triedu 9.B navštevuje 12 chlapcov a 16 dievčat. Počas chrípkovej epidémie polovica žiakov tejto triedy chýbala. Najmenej koľko dievčat v triede chýbalo. (KOMPARO 9 2008/09)

Grafický model a riešenie:

Odpoveď:

Takže, ak by ochoreli všetci chlapci (12), tak najmenej 2 dievčatá musia byť tiež choré, aby chýbala polovica žiakov triedy.

50. Na bežeckých pretekoch súťažia 4 dievčatá z jednej triedy. Júlia je 5 metrov pred Anežkou, Katka je 2 metre za Radkou, ktorá za Julkou zaostáva o 4 metre. O koľko metrov zaostáva Katka za Júliou? A o koľko je Anežka popredu oproti Katke?

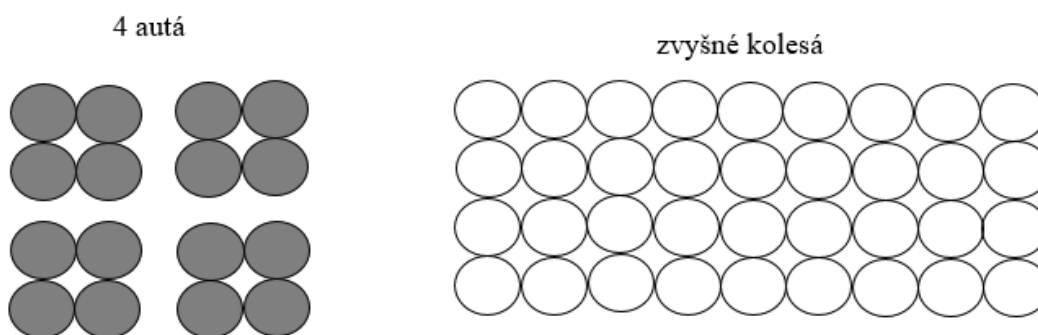
Grafická reprezentácia a riešenie:**Odpoveď:**

Rozdiel medzi Júliou a Katkou je $2 + 4 = 6$ m a Anežka je 1 m popredu oproti Katke.

51. Pred Coop Jednotou stálo niekoľko áut a bicyklov. Kým Eliška čakala pred obchodom na mamku, napočítala, že spolu majú 52 kolies, pričom bicyklov bolo o 4 menej ako áut. Koľko áut stálo na parkovisku?

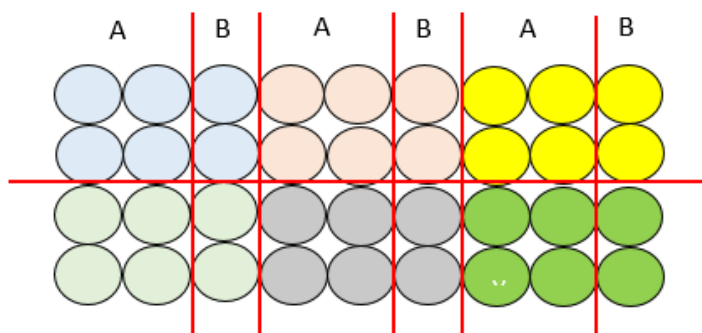
Grafické znázornenie a riešenie:

Nakreslíme si počet všetkých kolies, ktoré patria autám aj bicyklom. Zo zadania vieme, že oproti bicyklom máme o 4 autá viac a tak si hneď z 52 kolies oddelíme 4 štvorkolesové časti.



Zo zostávajúcich kolies by nám mal vyjsť rovnaký počet áut aj bicyklov.

Teda, každému autu akoby prislúchal aj jeden bicykel. No a to si znázorníme v schéme.



Vidíme, že zvyšné kolesá patria šiestim autám a šiestim bicyklom.

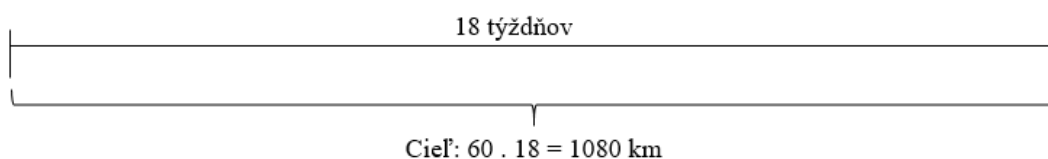
Odpoveď:

Na parkovisku stálo dokopy 10 áut.

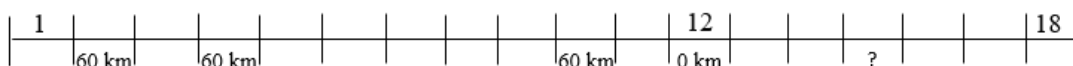
52. Roman začal trénovať na maratón 18 týždňov pred pretekmi. Podľa plánu mal nabehať každý týždeň 60 km. Dvanásty týždeň bol chorý a netrénoval vôbec. Koľko kilometrov musí nabehať počas zostávajúcich šiestich týždňov, aby splnil plán? (KOMPARO 9 2011/12)

Grafické znázornenie:

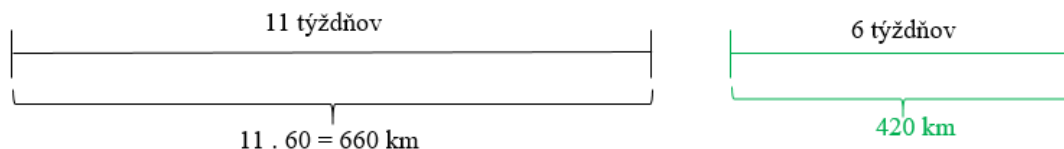
Pôvodný plán:



Realita:



Riešenie:



Ostalo mu 420 km, aby splnil cieľ a tiež 6 týždňov do súťaže: $420 : 6 = 70$ km.

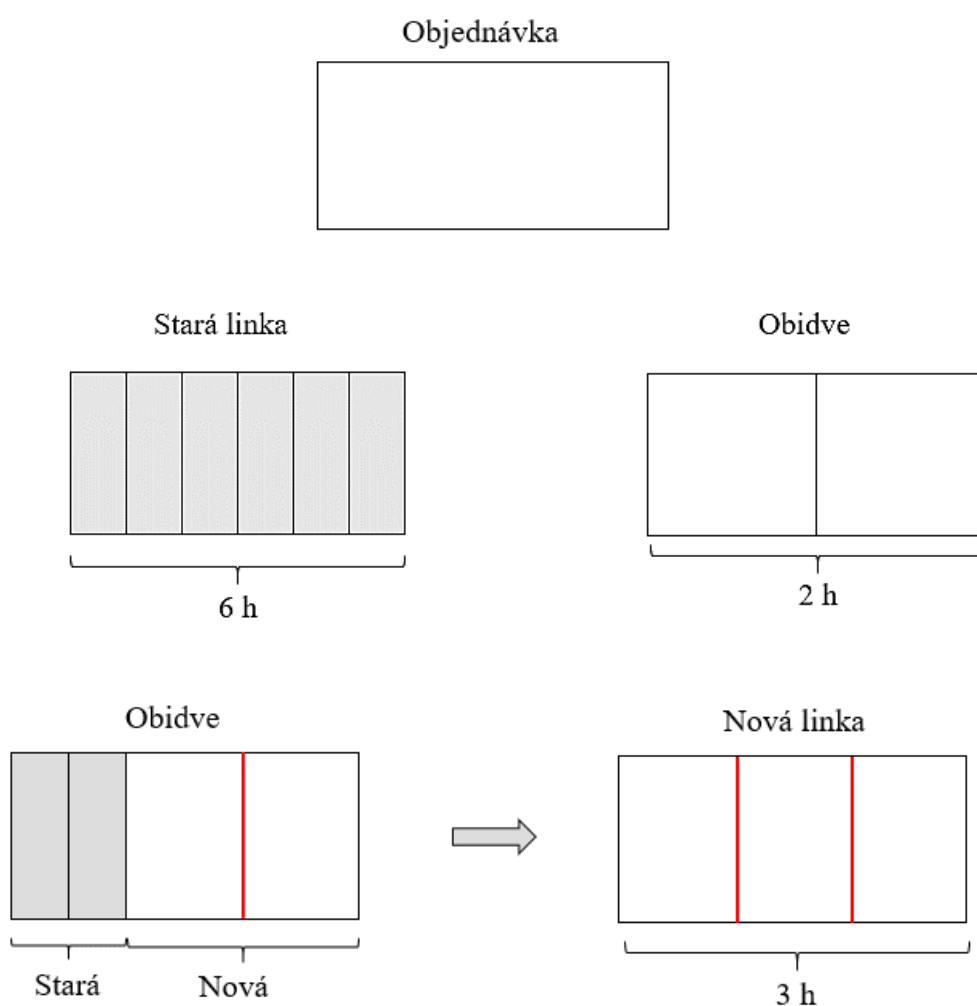
Resp. keďže vynechal 1 týždeň (60 km), keď bol chorý, tak si týchto 60 km musí rozložiť do zvyšných šiestich týždňov. Teda v každom z ostávajúcich týždňov musí navyše odbehnúť 10 km, čo je $60 + 10 = 70$ km týždenne.

Odpoveď:

Počas zostávajúcich šiestich týždňov musí behať 70 km týždenne, aby splnil plán.

3.12 Slovné úlohy o spoločnej práci

53. V mliekarni používajú pri dávkovaní jogurtov novú a starú linku. Dávkovaním jogurtov na starej linke je objednávka splnená za 6 hodín. Ak pracujú obe linky spoločne, splnia takú istú objednávku za 2 hodiny. Koľko hodín bude trvať splnenie takejto objednávky, ak sa budú jogurty dávkovať len na novej linke? (T9 – 2011)

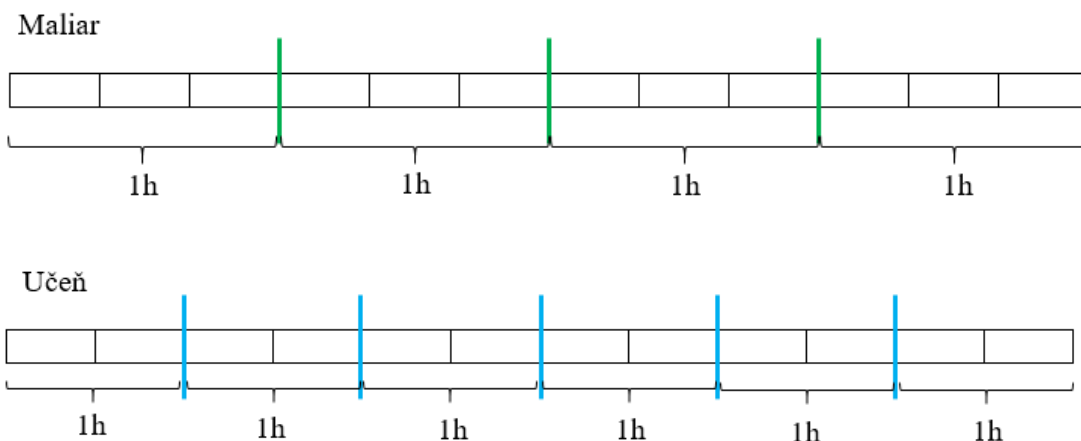
Grafické znázornenie a riešenie:**Odpoveď:**

Keby pracovala len nová linka, tak by na splnenie objednávky potrebovala 3 hodiny.

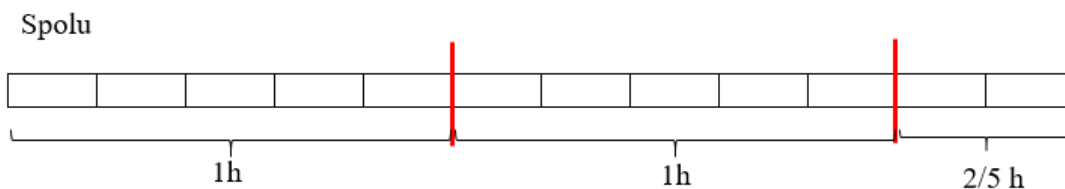
54. Maliar by vymaľoval halu za 4 hodiny. Jeho učeň za 6 hodín. Za koľko hodín ju vymaľujú spolu?

Grafické znázornenie a riešenie:

Celý panel predstavuje halu (žiak si pri tomto spôsobe vizualizácie musí uvedomiť, že panel, predstavujúci celú halu, bude výhodné rozdeliť na taký počet menších obdĺžnikov, ktorý mu umožní jednoducho rozdeliť celú halu na štvrtiny aj šestiny, čiže počet malých obdĺžnikov bude najmenším spoločným násobkom čísel 4 a 6).



Z vyššie uvedených obrázkov vidíme, že jeden vymaľuje za hodinu 3 obdĺžniky, druhý 2 a teda ak by pracovali spolu, vymaľovali by za hodinu $3 + 2 = 5$ obdĺžnikov.



Vieme, že $2/5$ z hodiny predstavujú 24 minút.

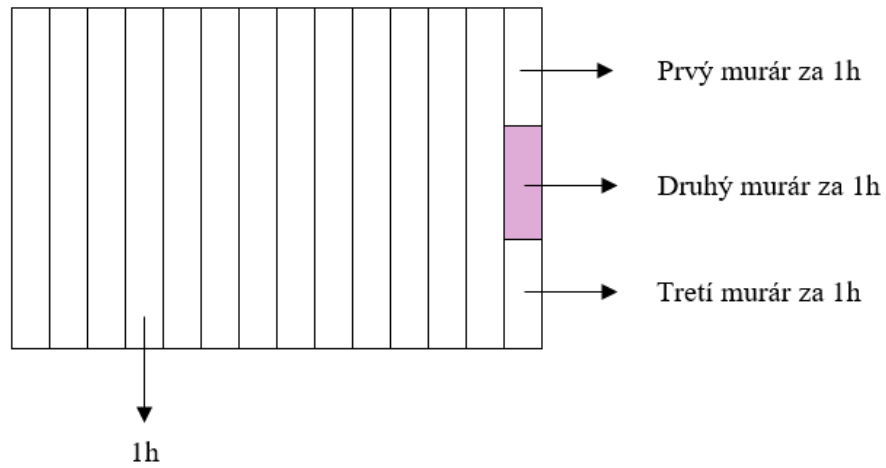
Odpoveď:

Maliar a učeň vymaľujú spolu halu za 2 hodiny a 24 minút.

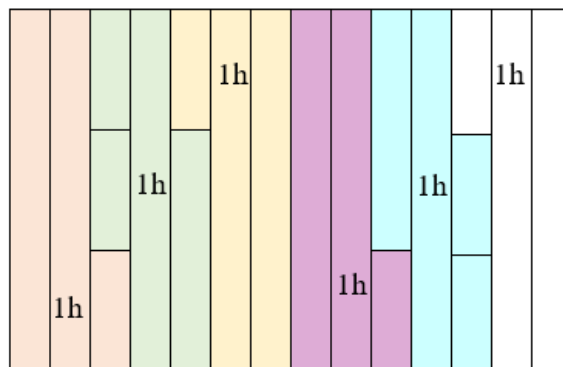
55. Ak traja murári postavia múr za 14 hodín, ako dlho to bude trvať siedmim murárom?
Predpokladáme, že všetci murári pracujú rovnako rýchlo.

Grafické znázornenie a riešenie:

Múr sme si rozdelili na 14 rovnakých častí, pričom vieme, že 1 časť murujú 3 murári 1h.



Keby bolo murárov 7, tak za hodinu vymurujú 7 takých častí.



Odpoveď:

Siedmi murári postaví múr za 6 hodín.

Zoznam použitej literatúry

- [1] BLAŽKOVÁ, Ružena a kol. *Kapitoly z didaktiky matematiky* [online]. Brno: MU, 2001. s.3-10 [cit. 2020-08-08]. Dostupné na: <https://docplayer.cz/23655560-Kapitoly-z-didaktiky-matematiky-slovni-ulohy-projekty-ruzena-blazkova-kvetoslava-matouskova-milena-vanurova.html>
- [2] ŠEDIVÝ, Ondrej a Karol KRIŽALKOVIČ. *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva 1.stupňa ZŠ*. Zdroj: RUPPELDOVÁ, Jana. *Operátorové myslenie: dizertačná práca* [online]. Praha: UK, 2010. s. 18 [cit. 2020-08-10]. Dostupné na: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/90255/>
- [3] HEJNÝ, Milan. Anatómia slovnej úlohy o veku. In *Disputationes Scientifcae*. Zdroj: RUPPELDOVÁ, Jana. *Operátorové myslenie: dizertačná práca* [online]. Praha: UK, 2010. s. 19 [cit. 2020-08-10]. Dostupné na: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/90255/>
- [4] ŠEDIVÝ, Ondrej a Dušan VALLO. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy. In *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia*. Nitre: UKF, 2013. s.4. ISBN 978-80-558-0238-1.
- [5] KOMPANOVÁ Viera. *Pracovný zošit z matematiky pre 1. ročník gymnázia*. Námestovo: TLAČIAREŇ KUBÍK, 2011. s. 23. ISBN 978-80-970645-0-1.
- [6] ŠEDIVÝ, Ondrej a kol. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. Nitra: UKF, 2013. s. 68. ISBN 978-80-558-0438-5.
- [7] DON, Eugene a Benay DON. *How to Solve Word Problems in Calculus* [online]. Copyright © 2001 by The McGraw-Hill Companies. s. xi-xii. [cit. 2020-09-23]. Dostupné na: http://gen.lib.rus.ec/search.php?req=how+to+solve+word+problems&lg_topic=libgen&open=0&view=simple&res=25&phrase=1&column=def. DOI 10.1036/0071386807.
- [8] HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila. a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1.diel*. Praha: UK, 2004. s. 369. ISBN 80-7290-189-3.
- [9] ZORFASS, Judy, GRAY, Tracy a PowerUp WHAT WORKS. *Understanding Word Problems in Mathematics* [online]. ©2020 WETA [cit. 2020-08-03]. Dostupné na: <http://www.ldonline.org/article/62401/>

- [10] ŠÍMA, František. *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*: dizertačná práca [online]. Olomouc: UPOL, 2013. s.15-16 [cit. 2020-09-22]. Dostupné na: <https://theses.cz/id/cjesg3/00175150-959273041.pdf>
- [11] ŠEDIVÝ Ondrej a kol.: *Matematika pre 9.ročník základných škôl, 1. časť*. Bratislava: SPN: Tretie vydanie, 2005. s.91-94. ISBN 80-10-00747-1.
- [12] BOONEN, Anton J.H. a kol. What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. In *Contemporary Educational Psychology* [online]. 2013, **38**(3), 271-279. [cit. 2020-10-21]. Dostupné na: <http://static.jellejolles.nl/Boonen-et-al.-2013-What-underlies-successful-word-problem-solving-A-path-analysis-in-sixth-grade-students.pdf>
- [13] ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. In *Educational Studies in Mathematics* [online]. 2003, **52**(3), 215-241. [cit. 2020-11-21]. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/225216743_The_role_of_visual_representations_in_the_learning_of_mathematics_Educational_Studies_in_Mathematics_523_215-241. DOI 10.1023/A:1024312321077.
- [14] MAREŠ, Jiří. Učení z obrazového materiálu. In *Pedagogika*. Zdroj: HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila a Nad'a STEHLÍKOVÁ. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl*. Praha: UK, 2004. s. 371. ISBN 80-7290-189-3.
- [15] WEBSTER, Richard. *Tvorivá vizualizácia*. Bratislava: IKAR, 2007. s.16-17. ISBN 978-80-551-1371-5.
- [16] LUKÁČ, Stanislav. Využívanie grafických modelov pri riešení slovných úloh vo vyučovaní matematiky. In *Edukácia*. [online]. 2019, **3**(1), 119-129. [cit. 2020-11-21]. Dostupné na: <https://www.upjs.sk/public/media/20805/Lukac.pdf>
- [17] STRNÁDKOVÁ, Ivana. *Cesty a strategie žáků 10-12 letých při řešení vybraného typu slovních úloh*: diplomová práca [online]. Praha: UK, 2014. s.19 [cit. 2020-11-29]. Dostupné na: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/69548/DPTX_2012_1_11410_0_285656_0_129040.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- [18] GARDEREN, Delinda a Amy M. SCHEUERMANN. Diagramming Word Problems: A Strategic Approach for Instruction. In *Intervention in School and Clinic* [online]. 2015, **50**(5), 282-290. [cit. 2020-08-06]. DOI: 10.1177/1053451214560889. Dostupné na:

https://www.researchgate.net/publication/277003196_van_Garderen_D_Scheuermann_A_2015_Diagramming_word_problems_A_strategic_approach_for_instruction_Special_Series_Intervention_School_and_Clinic_505_282-290

[19] ALSHWAikh, Jihad. *Geometrical Diagrams as Representation and Communication: A Functional Analytic Framework* [online]. Institute of Education, University of London, 2011. s. 50. [cit. 2020-12-03]. Dostupné na: <https://core.ac.uk/download/pdf/33678438.pdf>

[20] DRURY, Helen. *How to Teach Mathematics for Mastery* [online]. Oxford: University Press, 2018. s. 149 -150 [cit. 2020-11-27]. Dostupné na:

<https://books.google.sk/books?id=ms7KDwAAQBAJ&pg=PA149&dq=Mathematical+Problem+Solving+->

[+The+Bar+Model+Method&hl=sk&sa=X&ved=2ahUKEwiipZq0ifvrAhVMDOWKHZyNCJEQ6AEwB3oECAkQAg#v=onepage&q=Mathematical%20Problem%20Solving%20-%20The%20Bar%20Model%20Method&f=false](https://books.google.sk/books?id=ms7KDwAAQBAJ&pg=PA149&dq=Mathematical+Problem+Solving+-+The+Bar+Model+Method&hl=sk&sa=X&ved=2ahUKEwiipZq0ifvrAhVMDOWKHZyNCJEQ6AEwB3oECAkQAg#v=onepage&q=Mathematical%20Problem%20Solving%20-%20The%20Bar%20Model%20Method&f=false) ISBN 978-0-19-841409-4.

[21] BACKMANN, Sybilla. Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. In *The Mathematics Educator* [online]. 2004, **14**(1), 42-46. [cit. 2020-12-01]. Dostupné na: <https://pennance.us/home/downloads/3041/beckmann.pdf>

[22] ŽABKA, Ján a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*. Bratislava: ORBIS PICTUS ISTROPOLITANA, 2018. s. 20. ISBN 978-80-8120-585-9.

[23] WINCZEROVÁ, Monika. Prístup žiakov k riešeniu slovných úloh na porovnávanie. In *Matematické obzory*. Bratislava: SPN. 1993, zväzok 39. s. 39-51.

[24] BOONEN, Anton J. H. a Jelle JOLLES. COMPREHENSION & VISUALIZATION - Teaching Students to Solve Word Problems. In *Research & Reviews: Journal of Educational Studies* [online]. Amsterdam: VU University. 2015, 1-4. [cit. 2021-03-09]. Dostupné na: https://www.academia.edu/26528482/COMPREHENSION_and_VISUALIZATION_Teaching_Students_to_Solve_Word_Problems

[25] GÜLER, Gürsel a ÇILTAŞ Alper. The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems. In *International Journal of Humanities and Social Science* [online]. 2011, **1**(11), 145-154. [cit. 2021-03-15]. Dostupné na: http://www.ijhssnet.com/journals/Vol_1_No_11_Special_Issue_August_2011/17.pdf

Literatúra použitá na zostavenie zbierky

BEROVÁ, Zuzana a Peter BERO. *Pomocník z Matematiky pre 9. ročník ZŠ a 4. ročník gymnázií s osemročným štúdiom*. Bratislava: ORBIS PICTUS ISTROPOLITANA, 2012. 79s. ISBN 978-80-8120-187-5.

KOMPANOVÁ Viera. *Pracovný zošit z matematiky pre 1. ročník gymnázia*. Námestovo: TLAČIAREŇ KUBÍK, 2011. 132s. ISBN 978-80-970645-0-1.

URBANOVÁ Jaroslava a kol. *Matematika pre 5. ročník základnej školy, 1. diel*. Bratislava: SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Prvé vydanie, 1988. 170s. Skl. č. 1-11-597-067-202-88.

ŠEDIVÝ Ondrej a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl, 2. časť*. Bratislava: SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Tretie vydanie, 2004. 158s. ISBN 80-10-00396-4.

ŠEDIVÝ Ondrej a kol.: *Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť*. Bratislava: SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Tretie vydanie, 2006. 158s. ISBN 80-10-00883-4.

ŠEDIVÝ Ondrej a kol.: *Matematika pre 9. ročník základných škôl, 1. časť*. Bratislava: SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Tretie vydanie, 2005. 119s. ISBN 80-10-00747-1.

ŠEDIVÝ Ondrej a kol.: *Matematika pre 9. ročník základných škôl, 2. časť*. Bratislava: SLOVENSKÉ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVO: Štvrté, upravené vydanie, 2008. 142s. ISBN 80-10-01409-5.

ŽABKA, Ján a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 7. ročník ZŠ a 2. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. Bratislava: ORBIS PICTUS ISTROPOLITANA: Prvé vydanie, 2011. 136s. ISBN 978-80-8120-050-2.

ŽABKA, Ján a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*. Bratislava: ORBIS PICTUS ISTROPOLITANA, 2018. 135s. ISBN 978-80-8120-585-9.

ŽABKA, Ján a Pavol ČERNEK. *Matematika pre 8. ročník ZŠ a 3. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. Bratislava: ORBIS PICTUS ISTROPOLITANA, 2018. 127s. ISBN 978-80-8120-586-6.

Ďalšie

<https://monitor9.zones.sk/testy-testovanie9/>

<https://testovanie5.zones.sk/testy-testovanie5/>

<http://www.matematikakuciakova.wbl.sk/testy-Komparo.html>

<http://www.matematikakuciakova.wbl.sk/Testy-cvicenia-pracovne-listy23.html>

<https://www.viemematiku.sk/slovni-ulohy-pythagorova-diagramy-3-uroven/1363>